GOOL בגרויות

מתמטיקה

שאלון 581

מבחני בגרות ובחינות חזרה

הקדמה כללית:

ספרי התרגילים של גול הינם פרי של שנות ניסיון רבות בהוראת חומרי הלימוד ובהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

ניתן למצוא את הפתרונות מלאים בוידאו באתר הבגרויות של גול לכל השאלות שבספר זה. הפתרונות מלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותנו היא שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

בהצלחה!

צוות האתר גול

תוכן העניינים:

שאלון 581 .... **10**
בגרויות משנים קודמות **10**
בגרות חורף 2013 : 10
תשובות סופיות: 14
בגרות קיץ 2013 מועד א׳ : 15
תשובות סופיות: 19
בגרות קיץ 2013 מועד ב׳ : 20
תשובות סופיות: 24
בגרות חורף 2014 : 25
תשובות סופיות: 28
בגרות קיץ 2014 מועד א׳ : 29
תשובות סופיות: 32
בגרות קיץ 2014 מועד ב׳ : 33
תשובות סופיות: 36
בגרות קיץ 2014 מועד ג׳ : 37
תשובות סופיות: 41
בגרות חורף 2015 : 42
תשובות סופיות: 45
בגרות קיץ 2015 מועד א׳ : 46
תשובות סופיות: 50
בגרות קיץ 2015 מועד ב׳ : 51
תשובות סופיות: 55
בגרות חורף 2016 : 56
תשובות סופיות: 60
בגרות קיץ 2016 מועד א׳ : 61
תשובות סופיות: 65
בגרות קיץ 2016 מועד ב׳ : 66
תשובות סופיות: 70
בגרות חורף 2017 : 71
תשובות סופיות: 75
בגרות קיץ 2017 מועד א׳ : 76
תשובות סופיות: 79

בגרות קיץ 2017 מועד ב' : 80
תשובות סופיות: 84
בגרות חורף 2018 : 85
תשובות סופיות: 90
בגרות קיץ 2018 מועד א': 91
תשובות סופיות: 95
בגרות קיץ 2018 מועד ב' : 96
תשבות סופיות : 100
בגרות חורף 2019 : 101
תשובות סופיות: 106
בגרות קיץ 2019 מועד א': 107
תשובות סופיות: 113
בגרות קיץ 2019 מועד ב' : 114
תשובות סופיות: 119
בגרות חורף 2020 : 120
תשובות סופיות: 124
בגרות קיץ 2020 מועד א': 125
תשובות סופיות: 129
בגרות קיץ 2020 מועד ב' : 130
תשובות סופיות: 134

מיקוד קיץ 2023 לבגרויות משנים קודמות:

שנה	מועד	שאלה	מיקוד	הערות למיקוד
2013	חורף	1		
		2	לא בחומר	
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2013	קיץ א	1	ירד	
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2013	קיץ ב	1	ירד	
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8	ירד	בעיות קיצון בתנועה
2014	חורף	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2014	קיץ א	1		
		2		
		3		
		4	ירד	
		5		
		6		
		7		
		8		

2014	קיץ ב	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8	סעיף ב ירד	
2014	קיץ ג	1	ירד	
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2015	חורף	1	ירד	בעיית הספק
		2	ירד	נסיגה/כללית
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2015	קיץ א	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2015	קיץ ב	1		
		2	ירד	נסיגה/כללית
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		

2016	חורף	1		
		2		
		3		
		4	סעיף ג ירד	
		5		
		6		
		7		
		8		
2016	קיץ א	1		
		2	סעיפים ב-ד ירדו	
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2016	קיץ ב	1	ירד	בעיית הספק
		2		
		3		
		4		
		5		
		6	סעיף ג ירד	אינטגרל בטריגונומטריה
		7		
		8		
2017	חורף	1	ירד	בעיית הספק
		2	ירד	נסיגה/כללית
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2017	קיץ א	1		
		2	ירד	נסיגה/כללית
		3		
		4		
		5		
		6		
		7	סעיף ג ירד	אינטגרל בטריגונומטריה
		8		

2017	קיץ ב	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8	סעיף ג ירד	אינטגרל בטריגונומטריה
2018	חורף	1	ירד	בעיית הספק
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2018	קיץ א	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2018	קיץ ב	1		
		2	ירד	נסיגה/כללית
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2019	חורף	1	ירד	בעיית הספק
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		

2019	קיץ א	1	ירד	בעיית הספק
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8	סעיף ב ירד	נפח גוף סיבוב
2019	קיץ ב	1		
		2	ירד	נסיגה/כללית
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2020	חורף	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		
2020	קיץ א	1		
		2		
		3		
		4	ירד	
		5		
		6		
		7		
		8	ירד	
2020	קיץ ב	1		
		2		
		3		
		4		
		5		
		6		
		7		
		8		

שאלון 581

בגרויות משנים קודמות

בגרות חורף 2013:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) דן יצא מתל אביב להרצליה על אופניו, ורכב במהירות קבועה של v קמ"ש.
כעבור $\frac{1}{2}$ שעה מרגע היציאה של דן, גם אילנית יצאה על אופניה מתל אביב להרצליה,
ורכבה באותו מסלול במהירות הגדולה ב- 2 קמ"ש ממהירותו של דן. אילנית ודן נפגשו
בדרך להרצליה, ו- $\frac{1}{2}$ שעה לאחר הפגישה הגיעה אילנית להרצליה.
מצא באיזה תחום מספרים נמצאת המהירות v, אם נתון כי מסלול הרכיבה מתל אביב
להרצליה קטן מ- 25 ק"מ וגדול מ- 9 ק"מ.

2) ענה על הסעיפים הבאים:

(1) אם מכניסים אחד מהסימנים $<$, $\le$, $>$, $\ge$ למשבצת הריקה
שבביטוי: $1^2+2^2+3^2+...+n^2 \square (1+2+3+...+n)^2$

שאלה זו ירדה מתוכנית הלימודים

מתקבל אי שוויון הנכון לכל n טבעי. בחר בסימן המתאים.

(2) הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי האי שוויון שבתת סעיף א (1)
מתקיים לכל n טבעי.

נתונה סדרה חשבונית שאיבריה הם: $58\ ,\ 62\ ,\ 66\ ,\ ...\ ,\ (4n+6)$

הבע את סכום הסדרה באמצעות n $(n>12)$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

3) בחדר I נמצאים k נשים ו- k גברים $(k>1)$. בחדר II נמצאים k נשים ו- $3k$ גברים.
מטילים קובייה מאוזנת. אם מתקבל מספר המתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I. אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II. כאשר בוחרים באופן זה, ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי $\frac{15}{7}$ מההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II.

א. מצא את k.

ב. מצא את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.

ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר.
מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

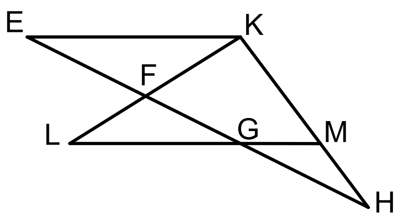
4) נתון משולש KHE. נקודות M ו- G נמצאות על צלעות KH ו-EH בהתאמה כך ש- $GM \parallel EK$. נקודה F נמצאת על צלע EH.
המשכי הקטעים GM ו-FK נפגשים בנקודה L (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle KML = \sphericalangle KFH$.

א. הוכח כי $\Delta KHE \sim \Delta FLG$.

ב. נתון גם: $\frac{EF}{GE} = \frac{3}{5}$, $EH =$ 12.5 ס"מ,
$LG =$ 5 ס"מ.

(1) מצא את האורך של EK.

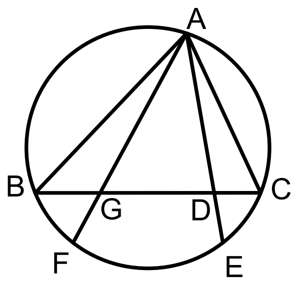
(2) מצא את היחס $\frac{MH}{KH}$.



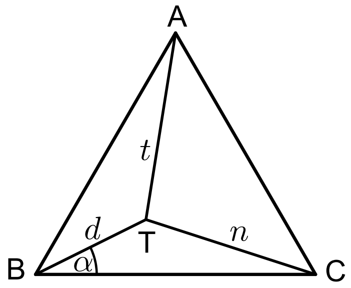
5) משולש ABC חסום במעגל.
המיתר AF חותך את BC בנקודה G.
המיתר AE חותך את BC בנקודה D (ראה ציור).
נתון: $BF = BG$, $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAE$.

א. הוכח כי $\Delta AGB \cong \Delta ACE$.

ב. נתון גם: $CE =$ 2 ס"מ, $AC =$ 5 ס"מ, $GC =$ 6 ס"מ.
חשב את האורך של המיתר AE.



6) נתון משולש שווה צלעות ABC.
נקודה T נמצאת בתוך המשולש (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle TBC=\alpha$, n ס"מ = CT ,
d ס"מ = BT , t ס"מ = AT.
אורך צלע המשולש הוא 2 ס"מ.



א. הוכח כי $\sin(\alpha-30^\circ)=\frac{n^2-t^2}{4d}$.

ב. הבע את שטח המשולש ATC באמצעות α ו- d.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{6}{x^2+3a^2}$. a הוא פרמטר, $a>0$.

א. מצא (הבע באמצעות a במידת הצורך):

(1) את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. ידוע שלפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד והן $x=\pm a$.

(1) היעזר בגרף של $f(x)$, והבע באמצעות a את התחום שבו פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית, ואת התחום שבו שהיא שלילית. נמק.

(2) הבע באמצעות a את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של $f'(x)$, וקבע את סוגן.

ד. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f'(x)$, על ידי הישר $x=a$ ועל ידי ציר ה- x . סמן במערכת צירים את השטח המבוקש.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=-\sqrt{\sin x}+\frac{1}{2}\sin x$ בקטע: $0\le x\le 3\pi$.

א. בקטע הנתון מצא:

(1) עבור אילו ערכי x הפונקציה מוגדרת.

(2) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בקטע הנתון.

(2) מצא משוואת ישר המשיק לגרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.

ג. האם יש ערכים של x בקטע הנתון שעבורם מתקיים

אי-השוויון $\frac{1}{2}\sin x>\sqrt{\sin x}$? נמק.

9) מחלקים חוט שאורכו k לשני חלקים (לאו דווקא חלקים שווים).
מחלק אחד של החוט יוצרים מעגל ומהחלק האחר יוצרים ריבוע.

סכום השטחים של שתי הצורות הוא מינימלי כאשר היקף המעגל הוא $\frac{5\pi}{\pi+4}$.

מצא את הערך של k.

תשובות סופיות:

1) $4<v<8$

2) א. (1). $\le$ א. (2). הוכחה   ב. $2(n+16)(n-12)$

3) $k=4$ ב. $\frac{11}{105}$ ג. $\frac{15}{188}$

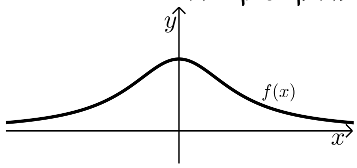
4) א. הוכחה   ב. (1). 7.5 ס"מ   ב. (2). $\frac{2}{5}$

5) א. הוכחה   ב. $\sqrt{41}$ ס"מ

6) א. הוכחה   ב. $\sqrt{3}-d\cos(30°-\alpha)$ או $\sqrt{3}-d\left[\sin(60°-\alpha)+\sin\alpha\right]$

7) א. (1). לכל x א. (2). $\left(0,\frac{2}{a^2}\right)$ א. (3). $y=0$ א. (4). $\max\left(0,\frac{2}{a^2}\right)$

ב. להלן סקיצה:



ג. (1). $f'(x)$ חיובית- $x>a$ או $x<-a$,

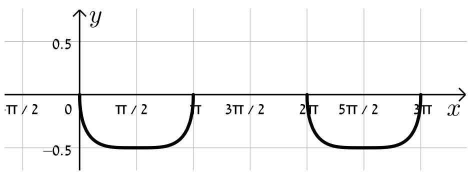
$f'(x)$ שלילית - $-a<x<a$

ג. (2). $x_{min}=a$, $x_{max}=-a$ ד. $\frac{1}{2a^2}$ יח"ר

8) א. (1). $2\pi\le x\le 3\pi$ או $0\le x\le\pi$

א. (2). $\max(3\pi,0)$, $\min\left(2\frac{1}{2}\pi,-\frac{1}{2}\right)$, $\max(\pi,0)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\max(0,0)$

ב. (1). להלן סקיצה: ב. (2). $y=-\frac{1}{2}$ ג. אין ערך כזה.



9) $k=5$.

בגרות קיץ 2013 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה – $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) פועל I ופועל II עובדים במפעל לייצור חלקי חילוף.
שני הפועלים מבצעים יחד עבודה מסוימת.
קצב העבודה הרגיל של פועל I שונה מקצב העבודה של פועל II.
אם כל אחד מהפועלים יגביר את הקצב העבודה הרגיל שלו ב- 50%,
ההפרש בין זמן העבודה של שני הפועלים יחד בקצב הרגיל ובין זמן העבודה שלהם יחד בקצב המוגבר יהיה $\frac{2}{15}$ מהזמן שנדרש לפועל I לבצע לבד את העבודה בקצב הרגיל שלו.

א. מצא את היחס בין הזמן שבו פועל I מבצע לבד את העבודה ובין הזמן שבו פועל II מבצע לבד עבודה זו.

ב. העבודה ששני הפועלים מבצעים יחד היא הכנה של 300 חלקי חילוף.
הפועלים ביצעו ביחד עבודה זו בקצב הרגיל ב- 6 ימים.
כמה חלקי חילוף ביום מכין לבד פועל I בקצב הרגיל שלו?

2) נתונה סדרה a_n.
סכום n האיברים הראשונים בסדרה הוא $S_n = n^2 - 5n + [2+6+10+...+(4n-2)]$

א. מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n בסדרה הנתונה.

ב. מתבוננים באיברים של הסדרה הנתונה, שערך כל אחד מהם קטן מ-102.
חשב את הערך הגדול ביותר שיכול להתקבל עבור סכום מסוים של איברים כאלה (לאו דווקא הסכום של כל האיברים).

3) הוועדה המארגנת של תחרות "נולד לשיר" מתלבטת אם ישפוט בתחרות רק שופט א' או יצטרפו אליו שני שופטים נוספים: שופט ב' ושופט ג'.
ההצבעה של שופט א' לא תשתנה אם הוא ישפוט לבד או אם ישפוט עם אחרים.
ההצבעה של כל אחד מהשופטים אינה תלויה בהצבעה של השופטים האחרים.
אם ישפוט בתחרות רק שופט א' – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם השופט יצביע בעדו.
אם ישפטו שלושת השופטים – יעבור המתחרה לשלב נוסף בתחרות אם לפחות 2 מהשופטים יצביעו בעדו.
יוסי הוא אחד המתמודדים בתחרות. נתון כי ההסתברות ששופט א' יצביע בעד יוסי שווה להסתברות ששופט ב' יצביע בעדו. ההסתברות ששופט ג' יצביע בעד יוסי היא 0.5.

א. האם ההסתברות, שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפוט בתחרות רק שופט א', שווה להסתברות שיוסי יעבור לשלב נוסף בתחרות אם ישפטו בתחרות שלושת השופטים? נמק.

ב. לבסוף הוחלט שבתחרות ישפטו שלושת השופטים.
נתון כי ההסתברות, ששופט א' הצביע בעד יוסי אם ידוע כי יוסי עבר שלב נוסף בתחרות, גדולה מ- 0.8.
מצא את תחום הערכים של ההסתברות ששופט א' הצביע בעד יוסי.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

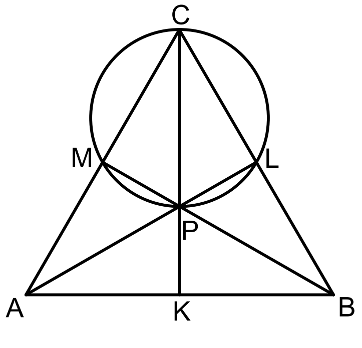
ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) ענה על הסעיפים הבאים:

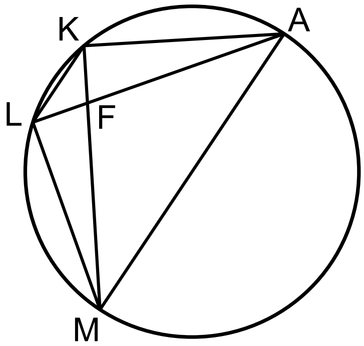
א. הוכח כי אם במשולש שני תיכונים שווים זה לזה, משולש הוא שווה שוקיים.

ב. במשולש ABC הנקודות L , M , ו- K הן אמצעי הצלעות CB , CA ו- AB בהתאמה.
הנקודה P היא נקודת מפגש של התיכונים במשולש,
ונתון שהיא נמצאת על מעגל העובר דרך
הנקודות L , M ו- C (ראה ציור).
נתון גם כי $AL = BM$.



(1) הוכח כי $BM \perp AC$.

(2) הוכח כי $AK = AM$.



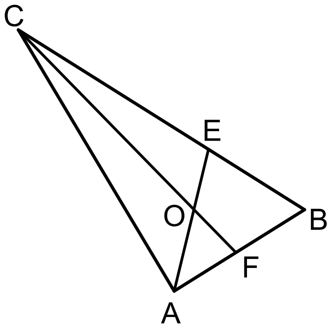
5) מרובע AKLM חסום במעגל. AM הוא קוטר.
אלכסוני המרובע נפגשים בנקודה F
(ראה ציור).
נתון: 30 ס"מ = ML , a ס"מ = FL
שטח המשולש ALK קטן פי 3 משטח המשולש ALM.

א. מצא את אורך הגובה לצלע LA במשולש ALK.

ב. הבע באמצעות a את אורך הקטע KF.

ג. הוכח כי $\Delta AFM \sim \Delta KFL$.

ד. נתון גם: 42.5 ס"מ = AF , $ML > a$ מצא את a.



6) הנקודה O היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.
המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E.
המשך CO חותך את הצלע AB בנקודה F (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

א. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AE}{CF}$.

ב. נתון גם: $\frac{AE}{CF} = \frac{1}{2}$, $\beta = 60°$.

הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB שווה ל- $\frac{1}{2}BC$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 9-7 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $g(x)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$ בתחום: $0\le x\le\frac{7}{3}\pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם גרף הפונקציה $f(x)=\sin x$.

ג. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

(1) מצא את האורך המקסימלי של הקטע AB.

(2) כמה קטעים כמו AB שאורכם מקסימלי מתקבלים בתחום הנתון? נמק.

8) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=x^2+4x+b$, $g(x)=-x^2+c$

b ו- c הם פרמטרים גדולים מ-0.

לגרפים של שתי הפונקציות יש משיק משותף בנקודה משותפת P.

א. הבע באמצעות b (במידת הצורך) את השיעורים של הנקודה P.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי $b>4$.

הישר $x=a$ חותך את המשיק המשותף בנקודה D, את הגרף של $f(x)$ בנקודה A ואת הגרף של $g(x)$ בנקודה B (D, A ו- B הן שלוש נקודות שונות).

ג. הראה כי הישר PD הוא תיכון במשולש PAB.

ד. השטח המוגבל על ידי הגרף $f(x)$, על ידי המשיק המשותף ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=-a$, הוא S .

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f(x)$, על ידי הגרף של $g(x)$ ועל ידי הישרים $x=a$ ו- $x=-a$.

9) נתון כי הפונקציה הזוגית $f(x)=\sqrt{8-ax+bx^2}+c$ מוגדרת בתחום $-2\le x\le 2$ בלבד.
a, b ו- c הם פרמטרים, $c>0$.

א. מצא את הערך של הפרמטר a ואת הערך של הפרמטר b.
הצב את הערך a ואת הערך של b, וענה על הסעיפים ב-ג.

ב. מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$, ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\sqrt{2}$.
השטח המוגבל על ידי שני המשיקים ועל ידי ציר ה- x הוא $\frac{49\sqrt{2}}{2}$.
מצא את הערך של הפרמטר c.

ג. בתחום $-2\le x\le 2$ נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=-f(x)$.
מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x=\sqrt{2}$,
ומעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\sqrt{2}$.
מהו סוג המרובע שנוצר על ידי הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $f(x)$ ושני הישרים המשיקים לגרף הפונקציה $g(x)$? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{2}{3}$ (או $\frac{3}{2}$) ב. 20

2) א. $a_n=6n-8$ ב. 884

3) א. הסתברות שווה ב. $0.6<p\le 1$

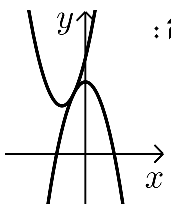
4) א. הוכחה ב. (1). הוכחה ב. (2). הוכחה

5) א. 10 ס"מ ב. $\frac{1}{3}\sqrt{a^2+900}$ ס"מ ג. הוכחה ד. $a=7.5$

6) $\frac{AE}{CF}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\alpha}$ ב. הוכחה

7) $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$, $\left(\frac{5\pi}{3},0\right)$ ב. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{4\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
ג. (1). 1 ג. (2). שני קטעים

8) א. $(-1,b-3)$ ב. להלן סקיצה:



ג. הוכחה ג. 2S

9) א. $a=0$, $b=-2$ ב. $c=3$
ג. מעוין.

בגרות קיץ 2013 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) ראובן ושמעון חופרים יחד תעלה אחת ב- 12 שעות.
אם ראובן חופר לבד $\frac{1}{3}$ מהתעלה, ולאחר שהוא מסיים את חלקו שמעון חופר לבד את יתר התעלה, החפירה מסתיימת כעבור $23\frac{1}{3}$ שעות.
כמה תעלות שלמות לכל היותר יחפור ראובן לבד בפחות מ- 100 שעות?
התעלות זהות לתעלה הנתונה.
הספקי העבודה של שמעון ושל ראובן אינם משתנים.

2) נתונה סדרה a_n : $a_1 , a_2 , a_3 , ... , a_n , ...$
ונתונה סדרת הסכומים S_n : $S_1 , S_2 , S_3 , ... , S_n , ...$
S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.
סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $b \neq 0 , S_1 = 3 , S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b.

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו- II:

I. $a_3 , a_7 , a_{11} , a_{15} , ...$

II. $a_1 , -a_3 , a_5 , -a_7 , ...$

T הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה I,
M הוא הסכום של אין סוף איברי הסדרה II.

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

3) מבין כל תלמידי י״ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי.
הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית.
הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית, ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית.
מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז תלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו.

א. מהי ההסתברות שלתלמיד י״ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית?

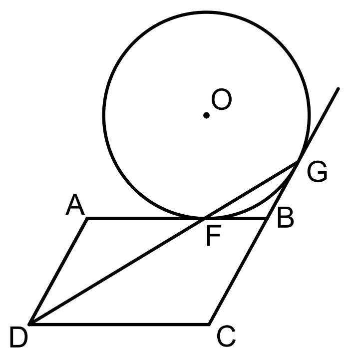
ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם.
בעיר יש 600 תלמידי י״ב.
מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) נתונה מקבילית ABCD.
הצלע AB משיקה למעגל שמרכזו O בנקודה F.
המשך הצלע CB משיק למעגל בנקודה G (ראה ציור).
נתון: $AF = AD$.



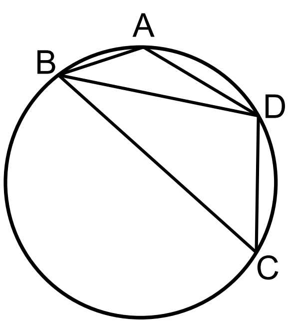
א. הוכח כי הנקודה F נמצאת על הישר DG.

ב. נתון גם: $FC \perp DC$, $BO = BC$.

(1) הוכח כי $OF = FC$.

(2) הוכח כי $FB = \frac{1}{2}BO$.

5) המרובע ABCD חסום במעגל.
המיתר BD חוצה את הזווית ABC (ראה ציור).
נתון: $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3\sqrt{3}$, $\sphericalangle ADC = 120°$.



א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את גודל הזווית ABD.

(2) מצא את אורך המיתר BD.

ב. נקודה K נמצאת על המיתר BD כך ש- $\Delta ABK \sim \Delta DBA$.
מצא את שטח המשולש ABK.

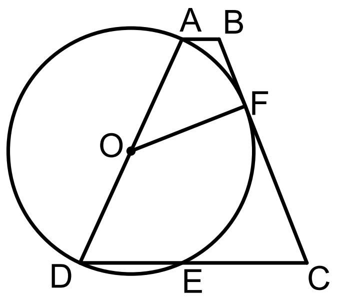
6) נתון טרפז שווה שוקיים ABCD $(AD = BC)$.

השוק AD היא קוטר במעגל שמרכזו O.

השוק BC משיקה למעגל בנקודה F.

המעגל חותך את הבסיס DC בנקודה E (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BCD = \alpha$.



א. הבע באמצעות α את גודל הזווית FOD.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הבע באמצעות α את גודל הזווית ODF.

(2) הבע באמצעות α את היחס $\frac{DE}{DC}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - \cos\frac{x}{2}$ בתחום: $2\pi \le x \le 5\pi$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה) בתחום הנתון.

(2) הראה כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ חיובית בתחום הנתון.

(3) רק על פי התשובות לתת סעיפים (1) ו- (2), סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

(4) כמה פתרונות יש למשוואה $f'(x) = 40$ בתחום הנתון? נמק.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) רשום את הערך המקסימלי של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון.

(2) האם השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי גרף פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ בתחום הנתון, שווה לערך של האינטגרל המסוים $\int_{2\pi}^{5\pi}\left(f'(x) - f''(x)\right)dx$? נמק.

8) נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת לכל x, ונתונה הפונקציה $g(x)$.

נתון: $g(x)=k+2x$, $\int_0^1 g(x)dx=0$. k הוא פרמטר.

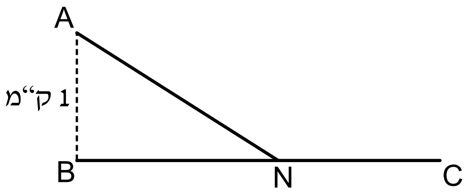
א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $g(x)$ עם הצירים.

ב. נתון גם כי בתחום $x\ge 0$ מתקיים: $f(x)\ge g(x)$, $f''(x)>0$, $f(0)=k$.
סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של הפונקציה $g(x)$
וסקיצה של הפונקציה $f(x)$ בתחום $x\ge 0$. נמק.

ג. בתחום $x\ge 0$ איזה שטח גדול יותר: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$
והצירים או השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה- x
ועל ידי הישר $x=1$? נמק.

ד. נתון גם: $f(x)=x^3+3x^2+ax+f(0)$, a הוא פרמטר, הגרף של $g(x)$ משיק
לגרף של $f(x)$ בנקודה הנמצאת בתחום $x\ge 0$. מצא את הפונקציה $f(x)$.

9) דני יצא מנקודה A, הנמצאת בשדה במרחק
1 ק״מ מהכביש BC. הוא הלך בשדה בקו
אלכסוני במהירות קבועה v, והגיע לכביש
BC בנקודה כלשהי N (ראה ציור).



דני הלך בכביש במהירות הגדולה פי $\frac{13}{12}$ מהמהירות שבה הלך בשדה,
והגיע לנקודה C בכביש. המרחק בין B ל- C הוא 6 ק״מ.
מהו אורך המסלול ANC אם ידוע שדני עבר אותו בזמן מינימלי?

תשובות סופיות:

1) א. לכל היותר 3 תעלות שלמות

2) א. הוכחה ב. $\frac{M}{T}=\frac{1-b^2}{b^2}$

3) א. $\frac{1}{3}$ ב. 40 תלמידים

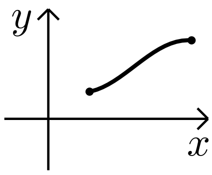
4) א. הוכחה ב. (1). הוכחה ב. (2). הוכחה

5) א. (1). $30°$ א. (2). 4 ב. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ יח"ר

6) א. $270°-2\alpha$ ב. (1). $\alpha-45°$ ב. (2). $\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(135°-\alpha)\sin(\alpha+45°)}$

7) א. (1). עלייה: $2\pi<x<5\pi$, ירידה: אין א. (2). הוכחה

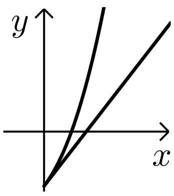
א. (3). להלן הסקיצה:



א. (4). אין פתרונות לתחום הנתון.

ב. (1). 2.25 ב. (2). כן

8) א. $(0,-1)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ ב. להלן סקיצה:



ג. השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=1$ גדול יותר.

ד. $f(x)=x^3+3x^2+2x-1$

9) 6.2 קמ"ש.

בגרות חורף 2014:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נמל A ונמל B נמצאים על אותה גדה של נהר, שכיוון הזרם שלו הוא מ-A ל-B.
רפסודה הפליגה בשעה 9:00 בבוקר מנמל A אל נמל B, והיא נישאה על גבי הזרם של הנהר כך שמהירות הרפסודה היא מהירות הזרם.
באותה שעה הפליגה סירה מנמל B (נגד כיוון הזרם) לכיוון נמל A.
מהירות הסירה במים עומדים היא 15 קמ״ש.
הסירה הגיעה לנמל A, ומיד חזרה אל נמל B.
ידוע כי הרפסודה והסירה יגיעו לנמל B באותה שעה.
נתון כי הרפסודה והסירה נפגשו לראשונה כעבור 5 שעות מרגע הפלגתן.
האם הסירה והרפסודה יגיעו לנמל B עד לשעה 9:00 בערב באותו היום? נמק.
מהירות הזרם ומהירות הסירה במים עומדים הן קבועות.
הערה: בחישוביך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת: $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6.
מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,
ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1, -a_2, a_3, -a_4, \ldots$.
סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3 .
מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_4}, \ldots$.

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25.
מצא את n.

3) בעיר מסוימת יש תושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, יש תושבים המשתתפים בחוג לתאטרון ויש תושבים המשתתפים בשני החוגים.
נמצא כי המאורע "תושב העיר משתתף בחוג לריקודי עם" והמאורע "תושב העיר המשתתף בחור לתאטרון" הם מאורעות בלתי תלויים.
מספר התושבים שמשתתפים בחוג לריקודי עם גדול פי 2 ממספר התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון.
מבין התושבים שמשתתפים בחוג לתאטרון, 60% משתתפים בחוג לריקודי עם.

א. מהו אחוז התושבים בעיר שמשתתפים בחוג לריקודי עם וגם בחוג לתיאטרון?

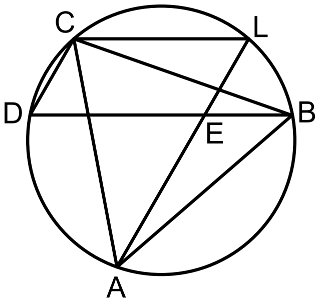
ב. יום אחד נערך בעיר כנס שהשתתפו בו כל התושבים המשתתפים בחוג לריקודי עם, ורק הם. עיתונאי ראיין 6 משתתפים בכנס שנבחרו באקראי.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מהם משתתפים בחוג לתאטרון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 4-6 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

4) משולש שווה-צלעות ABC חסום במעגל.
נקודות D ו- L נמצאות על המעגל כך ש- $BD \parallel LC$.
המיתרים AL ו-BD נחתכים בנקודה E (ראה ציור).

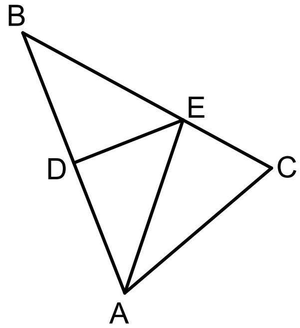


א. הוכח כי המרובע LEDC הוא מקבילית.

ב. (1) הוכח כי ΔADE הוא משולש שווה-צלעות.

(2) הוכח כי $LC + LB = LA$.

5) במשולש ABC האנך האמצעי לצלע BA חותך את הצלעות BC ו- BA בנקודות E ו-D בהתאמה (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.

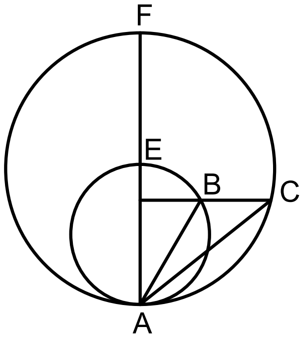


א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle EAC$.

(2) הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{CE}{EB}$.

ב. נתון גם: AE חוצה-זווית BAC,
$AC =$ 10 ס"מ , $\beta = 40°$. חשב את הרדיוס של המעגל החסום במשולש ABC.

6) שני מעגלים, גדול וקטן, משיקים מבפנים בנקודה A.
נקודה F נמצאת על המעגל הגדול כך ש<u>קטע המרכזים</u> של שני המעגלים נמצא על AF.
AF חותך את המעגל הקטן בנקודה E. דרך נקודה B שעל המעגל הקטן העבירו ישר המקביל למשיק המשותף לשני המעגלים.
המקביל חותך את המעגל הגדול בנקודה C (ראה ציור).
רדיוס המעגל הגדול הוא R, ורדיוס המעגל הקטן הוא r.
נתון: $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle FAB=\beta$.



א. (1) הבע באמצעות α ו- β את $\sphericalangle BCA$. נמק.
(2) הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{AC}{AB}$.

ב. הבע באמצעות α ו- β את היחס $\frac{R}{r}$.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות, של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 7-9 (לכל שאלה $16\frac{2}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

7) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^2+x-a}{x^2-x+a}$. a הוא פרמטר גדול מ-1.
הפונקציה $f\left(x\right)$ מוגדרת לכל x.

א. (1) מצא את האסימפטוטות של $f\left(x\right)$ המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
(2) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של $f\left(x\right)$, וקבע את סוגן. (הבע באמצעות a במידת הצורך).
(3) ידוע כי גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות בדיוק.
סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

ב. בתחום $x\le 0$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f'\left(x\right)$, על ידי הישר $x=-1$ ועל ידי ציר ה- x, שווה ל- $\frac{1}{2}$.
חשב את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$ עם ציר ה- x
(מצא ערכים מספריים).

8) במשולש שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$) אורך השוק הוא b.
BD הוא גובה לשוק AC. DE הוא אנך לבסיס BC.
סמן: $\sphericalangle BAC = 2x$, ומצא מה צריך להיות הגודל של $\sphericalangle BAC$, כדי שאורך האנך DE יהיה מקסימלי. בתשובתך דייק עד שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

9) בטבלה שלפניך מוצגים ערכים מסוימים של הפונקציה $f(x)$ בקטע $1 < x < 2$:

1.4	1.3	1.2	1.1	x
1.43	1.36	1.28	1.19	$f(x)$

הפונקציה $f(x)$ חיובית בקטע הנתון, ואין לה נקודות קיצון פנימיות בקטע זה.
נתון כי פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ שלילית בקטע הנתון.

א. קבע מהו הסימן של $f'(1.2)$. נמק.

ב. קבע אם הטענה $f'(1.3) < f'(1.2) < f'(1.1)$ נכונה. נמק.

נתונה הפונקציה $g(x) = \sqrt{f(x)}$ בקטע $1 < x < 2$.

ג. בקטע הנתון מצא תחומי עליה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ד. הראה כי בתחום $1.1 \le x \le 1.3$ אין פתרון למשוואה $g'(x) = f'(x)$.

תשובות סופיות:

1) לא, הם יגיעו לנמל B 12.07 שעות לאחר יציאתם

2) א. הוכחה ב. $n = 7$

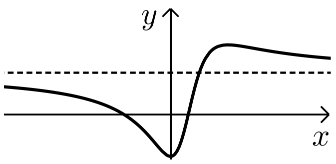
3) א. 18% ב. 0.579825

4) א. הוכחה ב. (1). הוכחה ב. (2). הוכחה

5) א. (1). $\alpha - \beta$ א. (2). $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$ ב. 3.42 סמ"ר.

6) א. (1). $90° - (\alpha+\beta)$ א. (2). $\cos\beta / \left[\cos^2(\alpha+\beta)\right]$ ב. $\cos^2\beta / \left[\cos^2(\alpha+\beta)\right]$.

7) א. (1). $y = 1$ א. (2). $\min(0,-1)$, $\max\left(2a, \dfrac{4a+1}{4a-1}\right)$



א. (3). סקיצה בצד. ב. $(-2,0)$, $(1,0)$

8) $109.47°$

9) א. הסימן הוא חיובי ב. הטענה נכונה ג. עלייה: $1 < x < 2$, ירידה: אין ד. אין

בגרות קיץ 2014 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) משאית יצאה מעיר A , וכעבור 6 שעות מרגע יציאתה הגיעה לעיר B.
זמן מה אחרי יציאת המשאית יצאה מכונית מעיר A, והגיעה לעיר B שעתיים לפני המשאית. המשאית והמכונית נפגשו כעבור שעה מרגע היציאה של המכונית.
המהירויות של המשאית ושל המכונית היו קבועות. מצא כמה שעות אחרי רגע היציאה של המשאית יצאה המכונית (מצא את שני הפתרונות).

2) בסדרה חשבונית יש $3n$ איברים.
סכום n האיברים האחרונים גדול פי 2 מסכום n האיברים הקודמים להם.

א. הוכח שסכום n האיברים הראשונים הוא 0.

ב. נתון גם שסכום האיברים החמישי והשביעי הוא 0.
סכום כל איברי הסדרה הוא 726.
מצא את הפרש הסדרה.

3) אבא ודני משחקים בזריקת כדור לסל. בכל משחק שני סיבובים.
המנצח בסיבוב מקבל נקודה אחת. אם הסיבוב מסתיים בתיקו,
כל אחד מקבל חצי נקודה. נתון:
ההסתברות שדני ינצח בסיבוב היא 0.1,
ההסתברות שאבא ינצח בסיבוב היא 0.2,
ההסתברות שהסיבוב יסתיים בתיקו היא 0.7.
הסיבובים אינם תלויים זה בזה.

א. מהי ההסתברות שאבא יצבור בשני הסיבובים יותר מנקודה אחת?

ב. מהי ההסתברות שדני יצבור בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת?

ג. ידוע כי דני צבר בשני הסיבובים לפחות נקודה אחת.
מהי ההסתברות שאחד הסיבובים הסתיים בתיקו והאחר הסתיים בניצחון של דני?

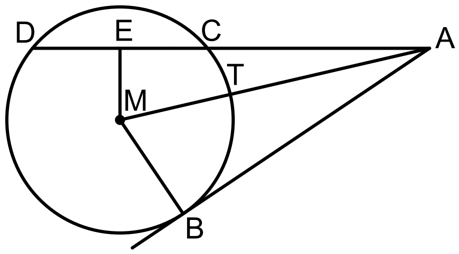
ד. אבא ודני משחקים 4 פעמים את המשחק שמתואר בפתיח.
(בכל משחק שני סיבובים.)
מהי ההסתברות שדני יצבור לפחות נקודה אחת 2 פעמים בדיוק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B, ויוצא ישר אחר החותך את המעגל בנקודות C ו-D. הנקודה E היא אמצע המיתר DC.
הנקודה M היא מרכז המעגל (ראה ציור).

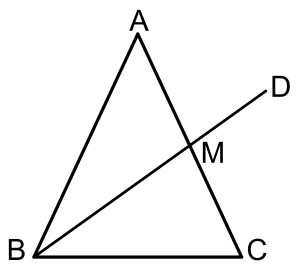


א. הוכח כי המרובע AEMB הוא בר חסימה במעגל.

ב. אלכסוני המרובע AEMB, שהוא בר חסימה במעגל, נפגשים בנקודה T.
נתון כי הנקודה T היא מפגש התיכונים במשולש BDC.
הוכח כי $TB^2 = 2MT \cdot TA$.

ג. נתון: $TE = \frac{\sqrt{10}}{2}$ ס"מ, $MT = 1$ ס"מ.
מצא את רדיוס המעגל החוסם את המרובע AEMB.

5) במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$,
BM הוא תיכון לשוק (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle BAC = 50^\circ$.



א. חשב את גודל הזווית הקהה AMB.

ב. ממשיכים את BM עד הנקודה D.
נתון גם:
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא 10 ס"מ.
רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 14 ס"מ.
חשב את זוויות המשולש AMD.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונות שתי פונקציות: $f(x)=2\sin^2 x$, $g(x)=\sin(2x)$, בתחום $0\le x\le \pi$.

א. בתחום הנתון מצא:

(1) את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

(2) את נקודות החיתוך של כל אחת משתי הפונקציות עם ציר ה- x.

ב. (1) נתונה הפונקציה $h(x)=x-\frac{\sin(2x)}{2}$, הראה כי $h'(x)=f(x)$.

(2) בתחום $0\le x\le \pi$ מצא את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\sqrt{ax^2+9}$. a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) הראה כי לפונקציה $f(x)$ אין נקודות פיתול.

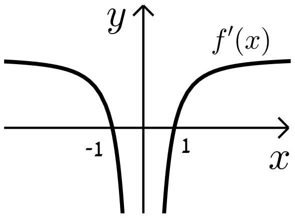
ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) הבע באמצעות a את האסימפטוטות האופקיות של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא תחומי עלייה וירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. השטח, המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=-4$ שווה ל-2. בלי לחשב את הערך של a, חשב את הערך המספרי של $f(-4)$ ואת הערך המספרי של $f(4)$.



8) בציור שלפניך מוצג הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.
האסימפטוטה היחידה של הפונקציה $f(x)$ היא $x=0$.
נתון כי יש פתרון אחד בלבד למשוואה $f(x)=2$
ופתרון אחד בלבד למשוואה $f(x)=-2$.

א. רק על פי נתוני השאלה, סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ב. נתון גם כי פונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $f'(x)=\dfrac{ax^2-b}{ax^2}$,
a ו-b הם פרמטרים שונים מ-0.
מצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

תשובות סופיות:

1) שעה או שעתיים.

2) א. הוכחה ב. $d=2$

3) א. 0.32 ב. 0.68 ג. $\frac{7}{34}$ ד. 0.2841

4) א. הוכחה ב. הוכחה ג. 3 ס"מ

5) א. $100.56°$ ב. $60.22°$, $79.44°$, $40.34°$

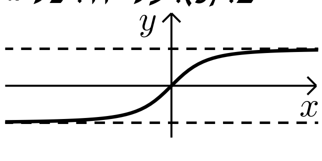
6) א. (1). $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\pi$ א. (2). $f(x):(\pi,0),\ (0,0)$,
$g(x):\ (\pi,0),\ \left(\frac{\pi}{2},0\right),\ (0,0)$.

ב. (1). הוכחה ב. (2). $2+\frac{\pi}{2}$.

7) א. (1). כל x א. (2). הוכחה ב. (1). כל x

ב. (2). $y=\sqrt{a}$, $y=-\sqrt{a}$ ב. (3). עלייה: כל x , ירידה: אין

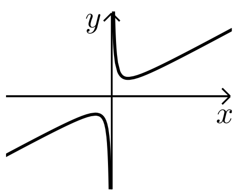
ב. (4). להלן סקיצה:



ג. $f(x)=5$, $f(-4)=5$

8) א. סקיצה למטה.

ב. $f(x)=x+\frac{1}{x}$



בגרות קיץ 2014 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) רץ I ורץ II יצאו באותו רגע מאותו מקום. הם רצו במהירות קבועה ובאותו כיוון.
המהירות של רץ I הייתה 6 קמ"ש, והמהירות של רץ II הייתה 7.5 קמ"ש.
כעבור 20 דקות מרגע היציאה של שני הרצים, יצא רץ III מאותו מקום ובאותו כיוון, והוא רץ במהירות קבועה. רץ III פגש בדרך את רץ I, ושעה אחר כך הוא פגש את רץ II. מצא כמה שעות עברו מרגע היציאה של רץ III לפגישתו עם רץ II.

2) נתונה סדרה חשבונית: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \dots$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, $a_{n+2}\ ,\ a_{n+1}\ ,\ a_n$, מקיימים:
$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$
$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר a_n.

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה: $a_5\ ,\ a_9\ ,\ a_{13}\ ,\ \dots\ ,\ a_{4k+1}$. סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450.
האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתיח הוא $a_1 = -21$. מצא את הערך של k.

3) בעיר גדולה כל אחד מתלמידי כיתות י"ב בשנה מסוימת בוחר באחד משני המסלולים לטיול שנתי: מסלול א' או מסלול ב'. נמצא:
75% מן התלמידים שבחרו במסלול א' הן בנות.
10% מן הבנות בחרו במסלול ב'.
40% מן התלמידים הם בנות.

א. בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת). מהי ההסתברות שהוא בחר במסלול א'?

ב. כאשר בוחרים באקראי תלמיד י"ב (בן/בת) האם המאורע "התלמיד הוא בת" והמאורע "התלמיד (בן/בת) בחר במסלול א' " הם מאורעות בלתי-תלויים? נמק.

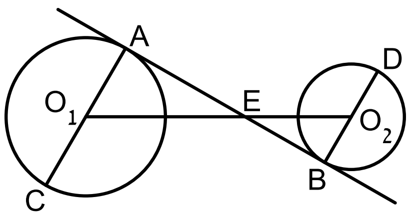
ג. בחרו באקראי כמה בנות מבין התלמידים.
נמצא שההסתברות שלפחות אחת מהן בחרה במסלול א' היא 0.99.
(הבחירה של המסלולים על ידי הבנות שנבחרו הן בלתי-תלויות).
כמה בנות נבחרו?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

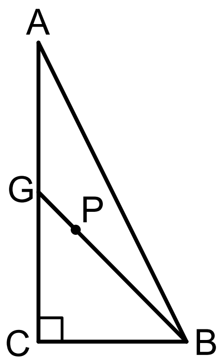
4) AC הוא קוטר במעגל שמרכזו O_1. BD הוא קוטר במעגל שמרכזו O_2.
ישר משיק למעגלים O_1 ו-O_2 בנקודות A ו-B בהתאמה.
המשיק חותך את קטע המרכזים O_1O_2 בנקודה E (ראה ציור).
נתון: רדיוס המעגל O_1 הוא 30 ס"מ, רדיוס המעגל O_2 הוא 20 ס"מ
אורך קטע המרכזים O_1O_2 הוא 90 ס"מ.



א. ענה על הסעיפים הבאים:
(1) מצא את היחס $\frac{O_1E}{O_1C}$. נמק.
(2) הוכח כי $\Delta EO_1C \sim \Delta EO_2D$.

ב. הוכח כי הנקודה E נמצאת על הישר CD.

5) במשולש ישר-זווית ACB $(\sphericalangle ACB = 90°)$
נקודה G היא אמצע הניצב AC.
נקודה P נמצאת על GB כך ש- $BG = 4 \cdot PG$.
רדיוס המעגל החוסם את המשולש CGB הוא R.
נתון: $GC = BC$.



א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACB.

ב. הבע באמצעות R את מרחק הנקודה P ממרכז המעגל החוסם את המשולש ACB.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונות שתי פונקציות: $g(x)=\sqrt{8x^2-x^4}$, $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה. מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ עם הצירים.

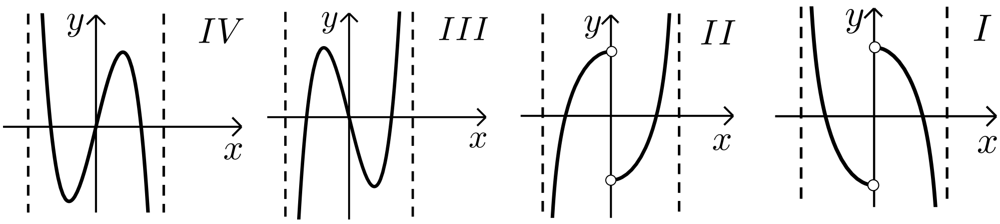
ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות, וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו-ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. לפניך ארבעה גרפים, $\text{I}-\text{IV}$.

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

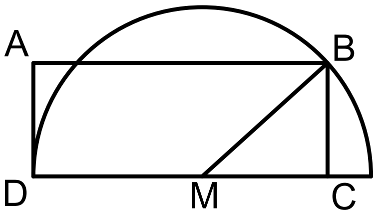
(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים: פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית. נמק.

8) נתון מלבן ABCD. הצלע DC מונחת על הקוטר של חצי מעגל שהרדיוס שלו R ומרכזו M כך ש- $DC \ge R$.
הצלע AD משיקה לחצי המעגל בנקודה D, והקדקוד B נמצא על המעגל (ראה ציור).
נסמן: $\sphericalangle BMC = x$
$S(x)$ - שטח המלבן ABCD.



א. מצא מה צריך להיות x, כדי ששטח המלבן $S(x)$ יהיה מקסימלי.

ב. הבע באמצעות R את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $S(x)$ ועל ידי ציר ה- x בתחום $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

תשובות סופיות:

1) שעה ו-40 דקות

2) א. 15 ב. $k=10$

3) א. 0.48 ב. המאורעות תלויים ג. 2

4) א. (1). 1.8 א. (2). הוכחה ב. הוכחה

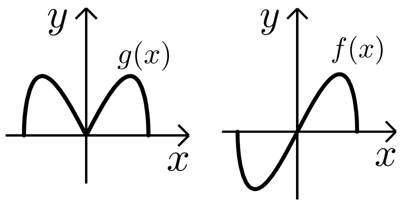
5) א. $1.58R$ ב. $0.5R$.

6) א. (1). $-2.83 \le x \le 2.83$

א. (2). $g(x)$: $(-2.83,0)$, $(0,0)$, $(2.83,0)$, $f(x)$: $(-2.83,0)$, $(0,0)$, $(2.83,0)$

ב. $f(x)$: $(-2,4)$, $\max(2,4)$, $(\sqrt{8},0)$, $(0,0)$, $\min(-\sqrt{8},0)$

ג. להלן סקיצה:

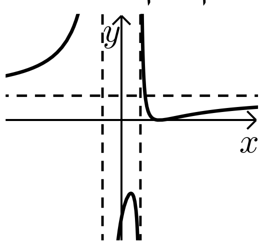


ד. גרף I

7) א. (1). $x \ne \pm 1$ א. (2). $x=1$, $x=-1$, $y=1$ א. (3). $(2,0)$, $(0,-4)$

א. (4). $\min(2,0)$, $\max(0.5,-3)$

ב. להלן סקיצה:



ג. $1 < x < 2$.

8) א. $\frac{1}{3}\cdot\pi$ ב. $1.5R^2$.

בגרות קיץ 2014 מועד ג':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) שני פועלים, פועל I ופועל II , מתקנים כביש.
ההספק של כל אחד משני הפועלים קבוע.
ביום הראשון עבד פועל I לבד 4 שעות, ואז הצטרף אליו פועל II
והם עבדו יחד עוד 3 שעות. התברר כי ביום הראשון ביצעו הפועלים
סך הכול 60% מהתיקון כולו.
ביום השני עבדו הפועלים יחד כל הזמן כך סך הכול בשני ימי עבודה
ביצע כל אחד מהפועלים בדיוק מחצית מהתיקון כולו.
מצא כמה שעות עבדו הפועלים יחד ביום השני.

2) נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים $(n>2)$: $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_{n-1} , a_n$.
הפרש הסדרה הנתונה הוא d.
מהסדרה הנתונה בנו סדרה חדשה של הפרשי ריבועים :

$$a_2^2-a_1^2 \ , a_3^2-a_2^2 \ , \ \cdots \ , a_n^2-a_{n-1}^2$$

א. הוכח כי הסדרה החדשה היא סדרה חשבונית שההפרש שלה הוא $2d^2$.

ב. נתון : $a_2^2-a_1^2=64$.
הבע את האיבר האחרון בסדרה החדשה באמצעות n ו- d .

ג. נתון גם : $a_n^2-a_{n-1}^2=192$, $d^2>1$.
מצא את תחום הערכים של n.

3) מבין העובדים בחברה גדולה בוחרים באקראי 4 עובדים.
ההסתברות שלכל היותר ל-3 עובדים יש השכלה גבוהה היא $\frac{255}{256}$.

א. לאיזה אחוז מהעובדים יש השכלה גבוהה?

ב. מהי ההסתברות שמבין 4 עובדים שבוחרים באקראי, ל-3 אין השכלה גבוהה?

ג. 40% מעובדי החברה הן נשים. ל- $\frac{1}{4}$ מהנשים יש השכלה גבוהה.
מבין העובדים שיש להם השכלה גבוהה בחרו באקראי שני עובדים.
מהי ההסתברות ששני העובדים הם נשים?

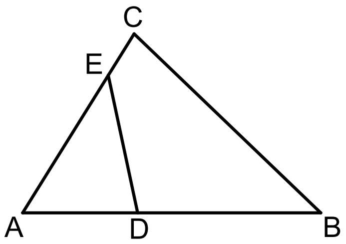
פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) במרובע BDEC המשכי הצלעות BD ו-CE נפגשים בנקודה A, כמתואר בציור.

נתון כי המרובע BDEC הוא בר-חסימה במעגל.



א. הוכח כי $\Delta ADE \sim \Delta ACB$.

נתון: שטח המשולש ACB גדול פי 4 משטח המשולש ADE.

נקודה F נמצאת על הצלע ED כך ש- $\sphericalangle EAF = \sphericalangle DAF$.

המשך AF חותך את BC בנקודה G.

ב. (1) הוכח כי $\Delta AEF \sim \Delta ABG$.

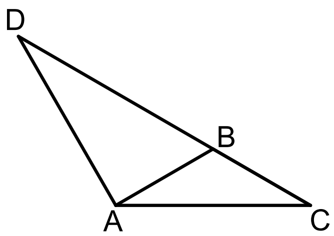
(2) מצא את היחס $\frac{EF}{BG}$.

ג. הוכח כי: $\frac{AD}{AE} = \frac{GC}{BG}$.

5) נתון משולש שווה-שוקיים ADC שבו $AD = AC$.

נקודה B נמצאת על הצלע DC כך ש- $AB = BC$

ו- $DC = 3BC$ (ראה ציור).



א. מצא את גודל הזווית במשולש ADC.

ב. נתון גם כי שטח המשולש ADC

הוא $16\sqrt{3}$ סמ"ר. BT הוא גובה

לצלע AC במשולש ABC.

מצא את האורך של הקטע DT.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 8-6 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=2x+\frac{\cos x}{\sin x}$ בתחום $0\le x\le \pi$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

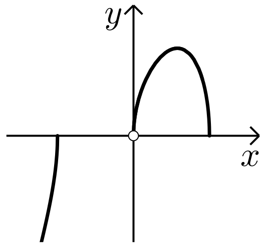
ב. (1) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$. השיפוע של משיק זה הוא המקסימלי מבין השיפועים של כל המשיקים לגרף הפונקציה בתחום הנתון.
מצא את הזווית שמשיק זה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה-x.

7) בציור שלפניך מוצגת סקיצה של גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{12x^3-x^5}}{x}$,
שתחום ההגדרה שלה הוא: $0<x\le 2\sqrt{3}$, $x\le -2\sqrt{3}$:



א. הישר $y=k$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות בדיוק.
מצא את תחום הערכים של k.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=\sqrt{12x-x^3}$, שתחום ההגדרה שלה
הוא $0\le x\le 2\sqrt{3}$, $x\le -2\sqrt{3}$.

(1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) עבור הערכים של k שמצאת בסעיף א, מצא בכמה נקודות חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה $g(x)$.

8) נתון כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x ומקיימת: $f'(x)=x^2-6x+5$.

א. הישר $y=10\frac{2}{3}$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה.

מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נתון כי הפונקציה $g(x)$ מוגדרת לכל x, ומקיימת: $f'(x)=g'(x)$.

ב. המרחק בין נקודת המקסימום של $f(x)$ לנקודת המקסימום של $g(x)$ הוא 1.

מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע את סוגן.
מצא את שתי האפשרויות.

ג. (1) סרטט באותה מערכת צירים סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$
וסקיצות של שני הגרפים האפשריים של $g(x)$.

(2) כמה נקודות פגישה עם ציר ה- x יש לכל אחד משלושת הגרפים שסרטטת?

תשובות סופיות:

1) 3 שעות

2) א. הוכחה   ב. $a_n = 2d^2n - 4d^2 + 64$ ג. $2 < n < 66$

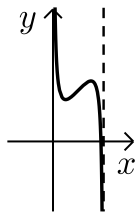
3) א. 25% ב. $\frac{27}{64}$ ג. 0.16

4) א. הוכחה   ב. (1). הוכחה   ב. (2). 0.5   ג. הוכחה.

5) א. $120°$, $30°$, $30°$ ב. 10.58 ס"מ

6) א. $0 < x < \pi$ ב. (1) $x = 0$, $x = \pi$ ב. (2). $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2.57\right)$, $\max\left(\frac{3\pi}{4}, 3.71\right)$

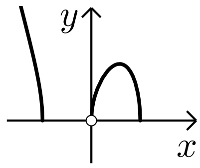
ב. (3). להלן סקיצה:



ג. $45°$.

7) א. $0 \le k < 4$ ב. (1). עלייה: $0 < x < 2$, ירידה: $2 < x < 2\sqrt{3}$ או $x < -2\sqrt{3}$

ב. (2). להלן סקיצה:

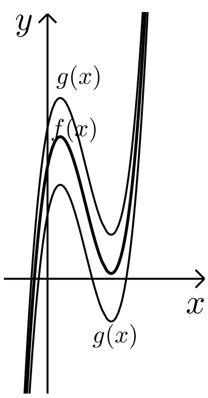


ב. (3). ב- 3 נקודות

8) א. $\max\left(1, 10\frac{2}{3}\right), \min(5, 0)$

ב. אפשרות 1: $\max\left(1, 11\frac{2}{3}\right), \min(5, 1)$, אפשרות 2: $\max\left(1, 9\frac{2}{3}\right), \min(5, -1)$

ג. (1). להלן סקיצה:



ג. (2). $f(x)$: 2 נקודות ל-$g(x)$ העליון: נקודה אחת.

ל-$g(x)$ התחתון: 3 נקודות.

בגרות חורף 2015:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) צבעים ותיקים וצבעים מתלמדים צריכים לצבוע מספר מסוים של דלתות.
צבע אחד ותיק ו-2 צבעים מתלמדים יסיימו את הצביעה בזמן הארוך ב- 25% מהזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מתלמד.
לכל צבע ותיק אותו קצב עבודה בלתי משתנה, ולכל צבע מתלמד אותו קצב עבודה בלתי משתנה. (צבע ותיק עובד מהר יותר מצבע מתלמד).

א. מצא את היחס בין הזמן שצבע מתלמד יסיים לבדו את צביעת הדלתות לבין הזמן שצבע ותיק יסיים לבדו את צביעת הדלתות.

ב. מצא כמה צבעים מתלמדים צריכים לעבוד עם צבע אחד ותיק, כדי שהם יסיימו את צביעת הדלתות במשך אותו הזמן שבו יסיימו את הצביעה 2 צבעים ותיקים וצבע אחד מתלמד.

2) סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי הכלל: $a_1=4$, $a_n+a_{n+1}=4n+2$

א. אם בסדרה יש 100 איברים, מצא את הסכום של שני האיברים העומדים במקומות האמצעיים בסדרה.

ב. הוכח כי איברי הסדרה העומדים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה חשבונית, וגם איברי הסדרה העומדים במקומות זוגיים מהווים סדרה חשבונית.

אם בסדרה יש 101 איברים, מצא:

ג. את האיבר העומד באמצע הסדרה.

ד. את הסכום של כל איברי הסדרה.

3) ביישוב גדול $\frac{1}{3}$ מהתושבים הם נשים, והשאר גברים.

מבין התושבים בוחרים באקראי שתי קבוצות:
קבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון ברדיו
וקבוצה של 4 אנשים (נשים / גברים) לריאיון בטלוויזיה.

א. מהי ההסתברות שבכל קבוצה יש בדיוק 2 גברים?

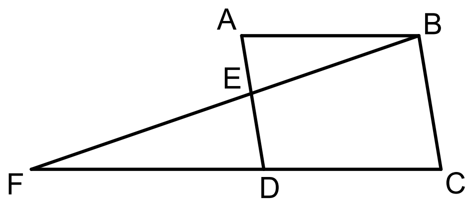
ב. ידוע כי בקבוצה שנבחרה לריאיון הרדיו היו לכל היותר 2 גברים.
מהי ההסתברות שהיו בקבוצה זו בדיוק 2 גברים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

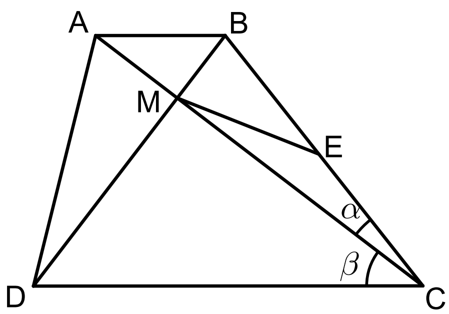
4) במקבילית ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD.
המשך BE חותך את המשך CD בנקודה F (ראה ציור).
נתון: שטח המשולש ABE הוא 27 סמ"ר.
שטח המשולש DFE הוא 48 סמ"ר.



א. מצא את שטח המשולש BED.

ב. נתון גם כי המרובע BCDE הוא בר חסימה במעגל.
מצא את היחס $\frac{AB}{EF}$.

5) אלכסוני הטרפז ABCD מאונכים זה לזה ונפגשים בנקודה M.
E היא אמצע השוק BC (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $\sphericalangle ACB = \beta$, $DC = a$.



א. הבע באמצעות a , α ו- β
את האורך של ME.

נתון: $\frac{1}{3} = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$, 6.6 ס"מ $= a$

ב. מצא את האורך של AB.

ג. נתון גם: 1.3 ס"מ $= BM$.
מצא את הזווית DCB.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

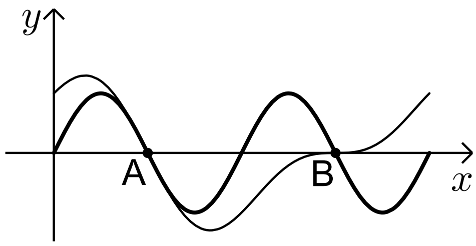
6) נתונות שתי פונקציות:

$f(x)=0.5\sin(2x)+\cos(x)$

$g(x)=\sin(2x)$

בתחום $0\le x\le 2\pi$.

בתחום הנתון הגרפים של הפונקציות נפגשים בשתי נקודות, A ו- B, הנמצאות על ציר ה-x, כמתואר בציור.



א. דרך נקודה על ציר ה-x, הנמצאת בין הנקודות A ו-B, מעבירים אנך לציר ה-x.
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות M ו-N.
מצא את האורך המקסימלי של הקטע MN.

ב. דרך נקודה על ציר ה-x, הנמצאת בתחום $0\le x\le \frac{\pi}{2}$, מעבירים אנך לציר ה-x.
האנך חותך את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודות K ו- L.
מצא את האורך המקסימלי של הקטע KL.

7) נתונות הפונקציות: $g(x)=\frac{1}{\sqrt{3x^2+2}}$; $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1+x^2}}$.

א. מצא עבור כל אחת מהפונקציות:
(1) את תחום ההגדרה.
(2) את האסימפטוטות המאונכות לצירים (אם יש כאלה).
(3) את השיעורים של נקודות הקיצון (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, אם ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה אחת בלבד.

ג. נתונה הפונקציה $h(x)=g(x)-k$, $k>0$.
עבור אילו ערכים של k אין לפונקציה $h(x)$ נקודות חיתוך עם הפונקציה $f(x)$?
נמק.

8) נתון כי הפונקציה $f(x)$ ופונקציית הנגזרת שלה $f'(x)$ מקיימות $\int_0^3 \frac{f'(x)}{2\cdot\sqrt{f(x)}}dx=3$.

נתון גם: $f'(x)=kx+2$, $f(0)=1$. k הוא פרמטר.

א. מצא את הערך המספרי של $f(3)$, ומצא את הפונקציה $f(x)$ (בלי פרמטרים).

ב. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=\sqrt{f(x)}$.

(1) הראה כי $g(x)=|x+1|$.

(2) סרטט במערכת צירים אחת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. 2 ב. 3

2) א. 202 ב. הוכחה ג. 104 ד. 10,304

3) א. $\frac{64}{729}$ ב. $\frac{8}{11}$

4) א. 36 סמ"ר ב. 0.75

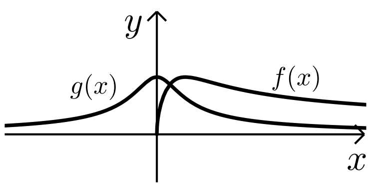
5) א. $ME=\frac{a\cos\alpha}{2\cos\beta}$ ב. AB = 2.2 ס"מ ג. 49.94°

6) א. 1.3 ב. 1

7) א. (1). $f(x):\ x\ge 0$, $g(x)$ לכל x א. (2). $x\to\infty: g(x):\ y=0$, $f(x):\ y=0$

א. (3). $f(x):\ \min(0,0)$, $\max\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $g(x):\ \max(0,0.707)$

ב. להלן סקיצה:

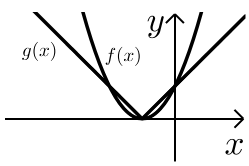


ג. $k>0.707$.

8) א. $f(3)=16$, $f(x)=x^2+2x+1$

ב. i. הוכחה

ב. (2). להלן סקיצה:



בגרות קיץ 2015 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) מכונית I ומכונית II יצאו באותו זמן מאותו מקום ולאותו כיוון.
המהירות של מכונית I הייתה 50 קמ"ש, והמהירות של מכונית II הייתה 40 קמ"ש.
כעבור חצי שעה מרגע היציאה של שתי המכוניות, יצאה גם מכונית III מאותו מקום ולאותו כיוון.
ברגע שמכונית III פגשה במכונית II, המרחק בין מכונית I למכונית II היה 15 ק"מ.
המהירויות של כל המכוניות היו קבועות.

א. מצא את המהירות של מכונית III.

ב. האם ייתכן שאחרי הפגישה בין מכונית III למכונית II, יהיה המרחק בין מכונית III למכונית I שווה למרחק בין מכונית II למכונית I? נמק.

2) נתונה סדרה הנדסית אין-סופית יורדת שכל איבריה חיוביים: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3,...,\ a_n,...$.
כל איבר בסדרה זו (חוץ מהראשון) הוא $\frac{2}{5}$ מסכום שני האיברים הסמוכים לו, אחד לפניו ואחד אחריו.

א. מצא את המנה של הסדרה a_n .

ב. נתונה הסדרה $b_n=\frac{a_{n+1}}{(a_n)^2}$.

(1) הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

(2) סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה b_n הוא 20,460.
מצא את סכום כל האיברים בסדרה a_n .

3) נתונה קבוצה של ספרות שונות: 3 ספרות הן זוגיות (שונות מ-0) והשאר הן ספרות אי-זוגיות. יוני יוצר מספר דו-ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:
הספרה הראשונה שיוני בוחר באקראי היא ספרת העשרות,
והספרה השנייה שהוא בוחר באקראי היא ספרת היחידות.
יוני בוחר כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.

א. נתון כי ההסתברות שיוני ייצור מספר אי-זוגי היא $\frac{4}{7}$.
מהו מספר הספרות האי-זוגיות בקבוצה הנתונה?

ב. אם ידוע שהמספר שנוצר הוא זוגי, מהי ההסתברות ששתי הספרות שיוני בחר הן זוגיות?

ג. אמילי יוצרת מספר תלת-ספרתי מן הספרות שבקבוצה הנתונה באופן זה:
הספרה הראשונה שאמילי בוחרת באקראי היא ספרת המאות,
הספרה השניה שהיא בוחרת באקראי היא ספרת העשרות,
והספרה השלישית שהיא בוחרת באקראי היא ספרת היחידות.
אמילי בוחרת כל ספרה בדיוק פעם אחת בלי החזרה.
ידוע כי הספרה הראשונה שאמילי בחרה היא זוגית.
מהי ההסתברות שבמספר התלת-ספרתי שאמילי יצרה, סכום הספרות היה זוגי?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) PA ו- PB משיקים למעגל שמרכזו O.
המשך BO חותך את המעגל בנקודה D (ראה ציור).

א. הוכח: $PO \parallel AD$.

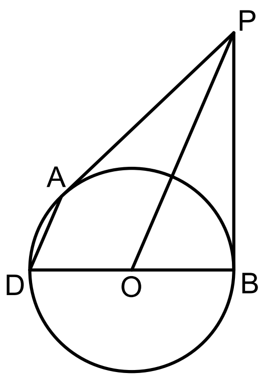
הנקודה C נמצאת על הקוטר DB כך ש- $AC \perp DB$.

ב. הוכח: $\Delta ADC \sim \Delta POB$.

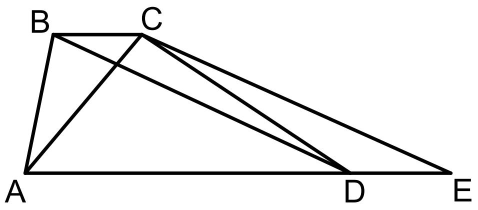
PD חותך את AC בנקודה E.

ג. הוכח: $\Delta DEC \sim \Delta DPB$.

ד. הוכח: $AC = 2EC$.



5) נתון טרפז ABCD $(BC \parallel AD)$.
הנקודה E נמצאת על המשך AD
כך ש- $CE \parallel BD$ (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle CAD = 2\sphericalangle DBC$, $DB = 1.8AC$.



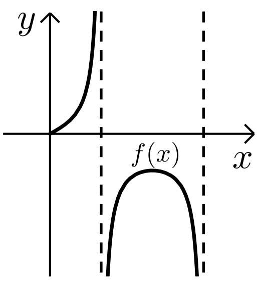
א. מצא את גודל הזווית CEA.
ב. נתון גם כי שטח המשולש ACE הוא 87.873 סמ"ר.
מצא את גובה הטרפז.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\sin x}{\cos 2x}$ ונתון התחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$
(ראה ציור). ענה על הסעיפים א,ב ו-ג עבור התחום הנתון.



א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.
(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן על פי הציור.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

ג. נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת: $g(x)=2f(x)\cdot f'(x)$.
מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,
על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=\frac{\pi}{6}$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x+2)^2}{(x-1)^3}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.
(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
(4) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. לפונקציה $f(x)$ יש שתי נקודות פיתול בלבד.
על סמך הגרף של הפונקציה $f(x)$ ציין באיזה תחום נמצאת כל אחת מנקודות אלה.

ג. האם השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים, גדול מ-4, קטן מ-4 או שווה ל-4 ? נמק.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a^2x+a^2$, a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. הראה כי המקסימום של הפונקציה מתקבל בנקודה שבה $y>0$.

ב. מצא עבור איזה ערך/איזה תחום ערכים של a נקודת המינימום של הפונקציה:
(1) נמצאת על ציר ה-x .
(2) נמצאת מעל ציר ה-x .
(3) נמצאת מתחת לציר ה-x .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה עבור כל אחד משלושת המקרים שבסעיף ב.

ד. כמה פתרונות יש למשוואה $\frac{1}{3}x^3-x+1=0$? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. 60 קמ"ש   ב. לא

2) א. 0.5   ב. (1). הוכחה   ב. (2). $\frac{1}{20}$.

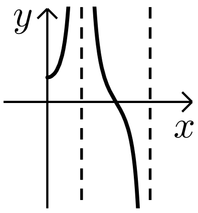
3) א. 4 ספרות אי זוגיות   ב. $\frac{1}{3}$ ג. $\frac{7}{15}$

4) א. הוכחה   ב. הוכחה   ג. הוכחה   ד. הוכחה

5) א. $25.8°$ ב. 7.8 ס"מ.

6) א. (1). $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ או $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ א. (2) $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$

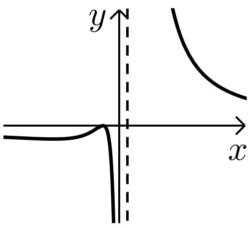
א. (3). $\max\left(\frac{\pi}{2},-1\right)$, $\min(0,0)$ ב. להלן סקיצה:



ג. 1.

7) א. (1). $x \ne 1$ א. (2). $x=1$, $y=0$ א. (3). $(0,-4)$, $(-2,0)$

א. (4). $\max(-2,0)$, $\min\left(-8,-\frac{4}{81}\right)$ א. (5). להלן סקיצה:

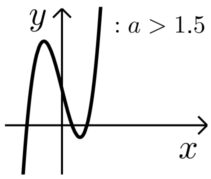


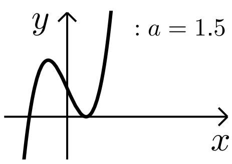
ב. נקודת פיתול בתחום $x<-8$, נקודת פיתול בתחום $-8<x<-2$

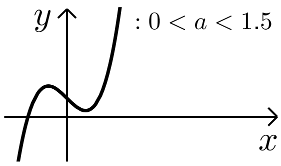
ג. קטן מ-4.

8) א. הוכחה   ב. (1). $a=1.5$ ב. (2). $0<a<1.5$ ב. (3). $a>1.5$

ג. להלן סקיצות:







ד. פתרון אחד.

בגרות קיץ 2015 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) בזמן הנסיעה באוטובוס הבחין יוסי ברגע מסוים באימא שלו, ההולכת ליד האוטובוס בכיוון הפוך לכיוון הנסיעה של האוטובוס. כעבור 10 שניות מהרגע שיוסי הבחין באימו, עצר האוטובוס בתחנה, ויוסי רץ מיד כדי להשיג את אימו. מהירות הריצה של יוסי גדולה פי 2 ממהירות ההליכה של אימו, והיא $1/7$ ממהירות הנסיעה של האוטובוס. כל המהירויות הן קבועות.

א. כמה זמן רץ יוסי כדי להשיג את אימו ?

ב. ברגע שיוסי השיג את אימו, הם הלכו יחד 3 דקות במהירות ההליכה של אימו (בכיוון ההליכה שלה). מיד בתום 3 הדקות רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס שירד בה (מהירות הריצה של יוסי היא כמו בסעיף א).
כמה זמן רץ יוסי בחזרה לתחנת האוטובוס ?

2) נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל $b_{n+1}=\frac{1}{2^n\cdot b_n}$.

א. הוכח כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה מהווים סדרה הנדסית, וגם האיברים העומדים במקומות הזוגיים מהווים סדרה הנדסית.

ב. סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה b_n שווה ל- $3\frac{7}{16}$.
מצא את b_1 (מצא את שתי האפשרויות).

3) חוקר עורך מחקר על הרגלי אכילה של סטודנטים באוניברסיטה גדולה במשך יום לימודים. חלק מהסטודנטים מביאים תמיד אוכל מהבית, והשאר אינם מביאים אוכל מהבית. כל הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית אוכלים אותו במשך היום ואינם אוכלים בקפיטריה. הסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אוכלים בקפטריה או אינם אוכלים במשך היום.

א. נמצא כי אם בוחרים באקראי 4 סטודנטים, ההסתברות שבדיוק 2 מהם מביאים אוכל מהבית גדולה פי 6 מההסתברות שבדיוק 1 מהם מביא אוכל מהבית.

(1) מהו אחוז הסטודנטים שמביאים אוכל מהבית?

(2) החוקר בחר באקראי 8 סטודנטים באוניברסיטה.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם מביא אוכל מהבית, אבל לא כולם?

ב. נמצא כי 60% מהסטודנטים שאינם מביאים אוכל מהבית אינם אוכלים במשך היום.

(1) מהו אחוז הסטודנטים באוניברסיטה שאוכלים בקפטריה?

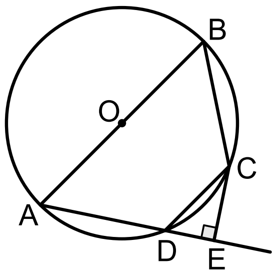
(2) מהי ההסתברות לבחור סטודנט שמביא אוכל מהבית מבין הסטודנטים שאוכלים במשך היום ?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) מרובע $ABCD$ חסום במעגל שמרכזו O.
הצלע AB היא קוטר.
E היא נקודה על המשך AD כך ש- $CE \perp AE$.



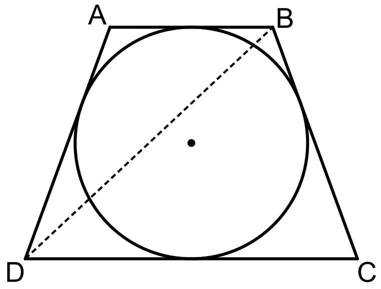
א. הוכח $\Delta CDE \sim \Delta ABC$.

נתון גם $OD \perp AC$, $\frac{S_{\Delta CDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{1}{4}$.

ב. הוכח כי $OC \parallel AD$.

ג. הוכח כי CE משיק למעגל.

5) מעגל שרדיוסו r חסום בטרפז שווה-שוקיים $ABCD$ $(AB \parallel DC)$, כמתואר בציור. נתון: $\sphericalangle BCD = 70°$.



א. הבע באמצעות r :

(1) את הבסיס הגדול של הטרפז.

(2) את שוק הטרפז.

(3) את אלכסון הטרפז.

ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החסום בטרפז ובין רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{1}{\sin x\cos x}$, ונתון התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

בתחום הנתון ענה על הסעיפים א ו-ב.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) האם הפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית או אי-זוגית? נמק.

(3) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=f(x)-a$.

(1) מצא את הערכים האפשריים של a שעבורם יש למשוואה $f(x)-a=0$ פתרון אחד בלבד.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ עבור כל אחד מהערכים של a שמצאת בתת-סעיף ב(1).

7) נתונה פונקציית הנגזרת $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

הישר $y=\frac{1}{3}x+3$ חותך את הגרף של הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=0$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ושל הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(4) מצא את תחומים העלייה והירידה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

(6) הוסף לסקיצה שסרטטת בתת-סעיף ב (5) סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. נתונות שתי משוואות I ו- II : $\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=k$ .I , $\sqrt{x^2+9}=k$ .II

נתון כי $k>0$. מצא את תחום הערכים של k שעבורם אין פתרון למשוואה I וגם אין פתרון למשוואה II.

8) נתונה הפונקציה $f(x)$, ונתון כי כל אחת מהפונקציות $f(x)$, $f'(x)$ ו- $f''(x)$ מוגדרת בתחום $x>0$. נתון גם: הגרף של $f'(x)$ חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x=1$, $f'(x)$ עולה בתחום $0<x<3$ ויורדת בתחום $x>3$, האסימפטוטות של $f'(x)$ הן $x=0$ ו- $y=0$.

א. סרטט סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$.

נתון גם כי לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אחת שמשוואתה $x=0$.

ב. מצא את שיעורי ה-x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ג. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של הפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. הפונקציה $f(x)$ מקבלת את כל הערכים בטווח $y\ge 4$ ורק אותם.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ציין על ציר ה-x ועל ציר ה-y את הערכים שמצאת.

ה. נתונה הפונקציה $g(x)=-[f(x)]^3$.
מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. 150 שניות ב. 240 שניות

2) א. הוכחה ב. $\frac{1}{3}$ או 1.5

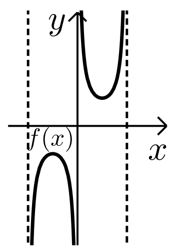
3) א. (1). 80% א. (2). 0.832 ב. (1). 8% ב. (2). 0.909

4) א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה

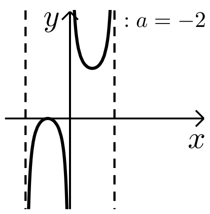
5) א. (1). $2.85r$ א. (2). $2.13r$ א. (3). $2.92r$ ב. 0.644

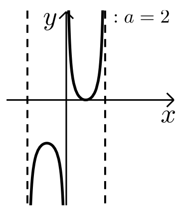
6) א. (1). $0<x<\frac{\pi}{2}$ או $-\frac{\pi}{2}<x<0$ א. (2). אי זוגית

א. (3). $\min(0.785,2)$, $\max(-0.785,-2)$ א. (4). להלן סקיצה:



ב. (1). $a=2$, $a=-2$
ב. (2). להלן סקיצה:



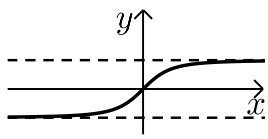


7) א. $f(x)=\sqrt{x^2+9}$ ב. (1). $f'(x)$ - כל x , $f(x)$ - כל x.

ב. (2). $y=1$ (עבור $x\to\infty$) , $y=-1$ (עבור $x\to-\infty$) ב. (3). $(0,0)$

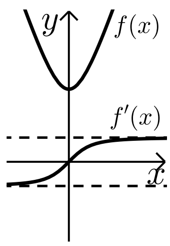
ב. (4). עלייה: כל x , ירידה: אין

ב. (5). להלן סקיצה:

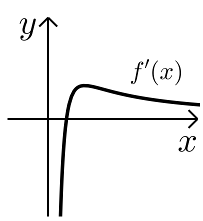


ג. $1\le k\le 3$

ב. (6). להלן סקיצה:

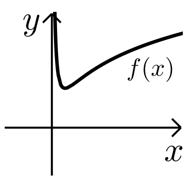


8) א. להלן סקיצה:



ב. $x_{\min}=1$

ג. כלפי מעלה: $0<x<3$, כלפי מטה $x>3$ ד. להלן סקיצה:



ה. עלייה: $0<x<1$, ירידה: $x>1$

בגרות חורף 2016:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) רוכב אופניים ורוכב אופנוע יצאו באותו רגע זה לקראת זה משני יישובים שונים.
הם נפגשו כעבור 3 שעות. רוכב האופנוע עובר $\frac{2}{3}$ מהדרך שבין שני היישובים ב-1.25 שעות פחות מהזמן שרוכב האופניים עובר $\frac{1}{4}$ מהדרך שבין שני היישובים.
מהירויות הרוכבים אינן משתנות.

א. מצא פי כמה המהירות של רוכב האופנוע גדולה מן המהירות של רוכב האופניים.

ב. מצא בכמה שעות עובר רוכב האופנוע את כל הדרך שבין שני היישובים.

2) נתונה סדרה הנדסית עולה: $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$.
ההפרש בין האיבר הרביעי בסדרה לאיבר השלישי גדול פי 4 מההפרש בין האיבר השני לאיבר הראשון. האיבר השישי בסדרה גדול ב-31 מהאיבר הראשון.

א. מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון בסדרה.

ב. מהסדרה הנתונה בנו שתי סדרות חדשות, I ו- II:

$$\text{I.}\quad a_1\cdot a_2\ ,\ a_2\cdot a_3\ ,\ a_3\cdot a_4\ ;\cdots,\ a_n\cdot a_{n+1}\ ,\ a_{n+1}\cdot a_{n+2}$$

$$\text{II.}\quad \frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}\ ,\ \frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}\ ,\ \frac{a_4}{a_3}+\frac{a_5}{a_4}\ ,\cdots,\ \frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

(1) האם כל אחת מהסדרות החדשות היא סדרה הנדסית עולה? נמק.
הסכום של כל האיברים בסדרה I הוא 2730.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה

(3) מצא את הסכום של כל האיברים בסדרה II.

3) במכונת מזל אפשר לזכות ב-50 שקלים, ב-100 שקלים או לא לזכות כלל.
דן משחק 5 משחקים במכונה זו. ההסתברות שדן יזכה ב-50 שקלים בדיוק פעמיים שווה להסתברות שהוא יזכה ב-50 שקלים בדיוק פעם אחת.
(ההסתברות לזכות ב-50 שקלים שונה מאפס.)
ההסתברות שדן לא יזכה באף משחק היא $\frac{1}{32}$.

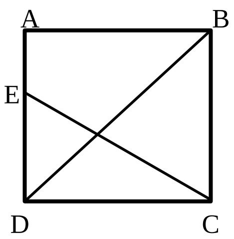
א. מהי ההסתברות שדן יזכה ב-50 שקלים במשחק בודד?
ב. מהי ההסתברות שדן יזכה ב-100 שקלים במשחק בודד?
ג. ידוע כי לאחר שדן שיחק שני משחקים הוא זכה סך הכול ב-100 שקלים בדיוק.
מהי ההסתברות שהוא לא זכה ב-50 שקלים באף אחד משני המשחקים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

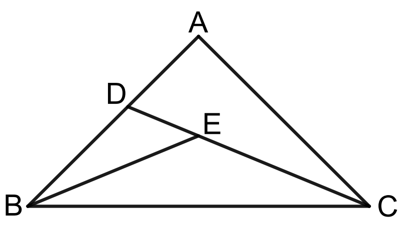
שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) בריבוע ABCD הנקודה E נמצאת על הצלע AD (ראה ציור).
מעגל העובר דרך הנקודות E, D, ו- C חותך את האלכסון BD בנקודה M,
ואת הצלע BC בנקודה N. הנקודה M נמצאת בין הקדקוד B
ובין נקודת החיתוך של BD עם CE.



א. הוכח כי $CD = EN$.
ב. האם הקטע DM קצר מהקטע CE, ארוך ממנו או שווה לו? נמק.
ג. הוכח כי $BM \cdot BD = AE \cdot AD$.

5) במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$
זווית הבסיס היא 2α. הנקודה E היא מפגש חוצי-הזווית במשולש ABC.
המשך CE חותך את הצלע AB נקודה D (ראה ציור).



נתון: $\frac{EC}{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2\sin\alpha}$, $\sphericalangle BAC > 90°$.

א. מצא את α.
ב. מצא את היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC.
ג. נתון כי ההפרש בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ובין רדיוס המעגל החסום במשולש ABC הוא 2 ס"מ.
מצא את אורך הקטע AE.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=a\sin^2 x+b\cos(4x)$ בתחום $0\le x\le \frac{2\pi}{3}$.

a ו- b הם פרמטרים. לפונקציה $f(x)$ יש קיצון בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{3}$.

נתון כי $b<0$.

א. הבע באמצעות b (במידות הצורך) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

ג. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום הנתון.

ד. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את הערך של האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} f''(x)dx$.

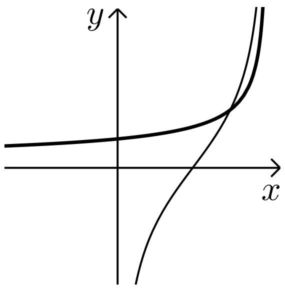
(2) בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{2\pi}{3}$, הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חותך את ציר ה- x בנקודה אחת שבה $x=k$.

בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le k$, השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$ על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=\frac{\pi}{2}$, שווה ל- S.

הבע באמצעות S את השטח המוגבל על ידי הגרף של $f''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישר $x=\frac{2\pi}{3}$ בתחום $k\le x\le \frac{2\pi}{3}$. נמק.

<u>הערה</u>: אין צורך למצוא את $f''(x)$.

7) נתונות הפונקציות: $g(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}$; $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}$



א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$, ואת תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $f(x)$, ואת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישר $x=1$.

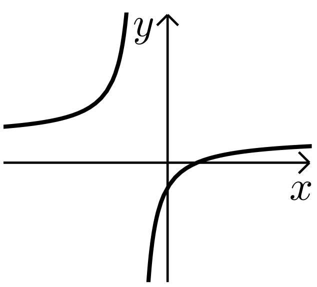
ג. נתונות הפונקציות: $h(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+2$, $t(x)=\frac{2x-3}{\sqrt{x(3-x)}}+2$

S_1 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ ועל ידי הישר $x=2.5$

S_2 הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $h(x)$ ו-$t(x)$ ועל ידי הישר $x=2.5$.

האם השטח S_1 גדול מהשטח S_2, קטן ממנו או שווה לו? נמק.

8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$



א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה, ואת אסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ב. העבירו ישר המקביל לציר ה-x. הישר חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה C ואת הישר $y=2x$ בנקודה D. נסמן את שיעור ה-x של הנקודה C ב-t.
מצא מה צריך להיות הערך של t, כדי שהאורך של הקטע CD יהיה מינימלי:

(1) עבור $t>-1$.

(2) עבור $t<-1$.

ג. מצא את האורך המינימלי של הקטע CD עבור כל $t\neq-1$.

תשובות סופיות:

1) א. פי 4 ב. 3.75 שעות

2) א. $q=2$, $a_1=1$ ב. (1). סדרה I עולה, סדרה II קבועה
ב. (2). 6 איברים ב. (3). 20

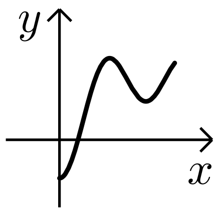
3) א. $\frac{1}{3}$ ב. $\frac{1}{6}$ ג. $\frac{3}{5}$.

4) א. הוכחה ב. DM קצר מ- CE ג. הוכחה

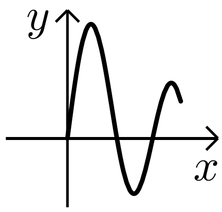
5) א. $\alpha=20°$ ב. 2.79 ג. 1.459 ס"מ

6) א. $\max\left(\frac{2\pi}{3},-3.5b\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},-3b\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{3},-3.5b\right)$, $\min(0,b)$

ב. להלן סקיצה:



ג. להלן סקיצה:



ד. (1). 0 ד. (2). S.

7) א. (1). $f(x):\ x<3$, $g(x):\ 0<x<3$
א. (2). $f(x):\ x=3,\ y=0(x\to\infty)$, $g(x):\ x=0,\ x=3$
ב. 0.6945 ג. שווה.

8) א. תחום הגדרה: $x\neq-1$, אנכית $x=1$, אופקית $y=1$
ב. (1). $t=0$ ב. (2). $t=-2$ ג. 0.5.

בגרות קיץ 2016 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) שתי מכוניות יצאו באותו זמן מעיר א׳ לעיר ב׳. המרחק בין שתי הערים הוא 300 ק״מ.
המכונית הראשונה נסעה במהירות הגדולה ב- 25 קמ״ש מהמהירות של המכונית השנייה. כעבור 1.5 שעות מרגע היציאה מעיר א׳, הקטינה המכונית הראשונה את מהירותה לחצי ממהירות הקודמת, והגיעה לעיר ב׳ $\frac{1}{2}$ שעה אחרי המכונית השנייה.

א. מצא את המהירות של המכונית השנייה אם ידוע שמהירותה גדולה מ- 60 קמ״ש.

ב. מצא כעבור כמה שעות מרגע היציאה מעיר א׳ ו<u>לפני</u> שהמכונית השנייה השיגה את המכונית הראשונה, היה המרחק בין שתי המכוניות 12.5 ק״מ (מצא את שתי האפשרויות).

2) נתונה סדרה חשבונית a_n המקיימת: $a_4+a_8+a_{12}+a_{16}=224$.

א. מצא את הסכום של 19 האיברים הראשונים בסדרה a_n.

הסדרה S_n היא סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה a_n: $S_1, S_2, S_3, ...$.

נתון כי $S_n = n\cdot a_n$ לכל n טבעי.

ב. הראה כי הפרש הסדרה a_n הוא 0.

ג. היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את a_1.

ד. נתונה סדרה b_n המקיימת את הכלל: $b_{n+1}-b_n=a_n+S_n$ לכל n טבעי.
היעזר בסעיפים הקודמים, ומצא את הסכום:
$(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+(b_4-b_3)+\cdots+(b_{20}-b_{19})$.

3) במבחן כניסה למכללה 20% מן הנבחנים היו מקיבוצים.
40% היו ממושבים ו- 40% היו מערים. 70% מן הנבחנים הצליחו במבחן.
$\frac{1}{8}$ מן הנבחנים שהיו ממושבים נכשלו במבחן.
ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מעיר וגם הצליח במבחן, גדולה פי 2.5 מן ההסתברות לבחור באקראי מבין כל הנבחנים נבחן שהיה מקיבוץ וגם הצליח במבחן.

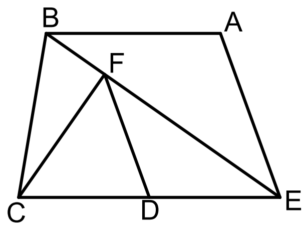
א. מבין הנבחנים שנכשלו במבחן, מהי ההסתברות לבחור באקראי נבחן שלא היה מעיר?

ב. (1) משה הצליח במבחן. מהי ההסתברות שהוא לא היה ממושב.
(2) חמישה נבחנים הצליחו במבחן.
מהי ההסתברות שלפחות אחד מהם היה ממושב?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



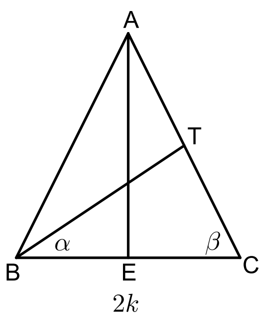
4) נתון טרפז ABCE $(AB \parallel EC)$ הנקודה F נמצאת על האלכסון BE כך ש- $CF \perp BE$.
הנקודה D היא אמצע הבסיס CE (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle CEB = \sphericalangle AEB$, $EA = 4a$, $ED = 3a$

א. הוכח כי $\Delta EAB \sim \Delta EDF$.

ב. נתון כי שטח המשולש EAB הוא S.
הבע באמצעות S את שטח המשולש CEF.

ג. המשך DF חותך את AB בנקודה G.

ד. הבע באמצעות S את שטח המשולש BFG.



5) נתון משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$. AE הוא גובה לבסיס BC, ו- BT הוא תיכון לשוק AC (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle ACB = \beta$, $\sphericalangle TBC = \alpha$, $BC = 2k$.

א. (1) הבע את האורך של TC באמצעות k ו- β בלבד.
(2) היעזר בתת-סעיף א (1), והראה כי:
$$\sin(\alpha+\beta) = 4\sin\alpha \cdot \cos\beta .$$

ב. נתון גם: TE = 5 ס"מ , k= 4 ס"מ.
(1) מצא את β.
(2) מצא את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=x^2-\sin\left(2x\right)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le 0$.

ענה על הסעיפים שלפניך עבור התחום הנתון.

א. מצא את השיפוע הגדול ביותר ואת השיפוע הקטן ביותר של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'\left(x\right)$.

ג. (1) מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ וכלפי מטה $\cap$ של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

7) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{ax^3+2ax}{\sqrt{x^4+4x^2+4}}$.

a הוא פרמטר גדול מ-0.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f\left(x\right)$.

ב. האם הפונקציה $f\left(x\right)$ היא זוגית או אי-זוגית? נמק.

ג. השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f\left(x\right)$, על ידי ציר ה-x ועל ידי הישרים $x=1$ ו-$x=-1$, שווה ל-4.
מצא את הערך של a.

ד. נתון כי הפונקציה $g\left(x\right)$ מקיימת $f\left(x\right)=g'\left(x\right)$.
אחת מנקודות החיתוך בין הגרפים של הפונקציות $f\left(x\right)$ ו-$g\left(x\right)$ היא נקודה שבה $x=0$.

(1) הראה כי הפונקציה $g\left(x\right)$ מקיימת: $g\left(x\right)=2x^2$.

(2) מצא את התחום שבו מתקיים $f\left(x\right)>g\left(x\right)$.

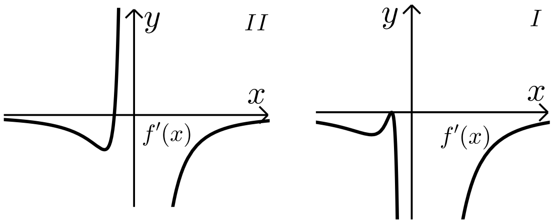
8) נתונה הפונקציה $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$, $x\neq 0$.

n הוא מספר טבעי גדול מ-1.

א. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

ב. הראה כי עבור n אי-זוגי $f'(x)\leq 0$ לכל $x\neq 0$.

לפניך שני גרפים, I ו- II . (בגרפים מוצגות כל נקודות הקיצון.)



אחד הגרפים מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n זוגי, והגרף האחר מייצג סקיצה של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור n אי-זוגי.

היעזר בגרפים I ו- II , וענה על הסעיפים ג,ד ו- ה.

ג. עבור n אי-זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

ד. עבור n זוגי:

(1) מצא כמה נקודות קיצון (אם יש כאלה) יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(2) מצא כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$. נמק.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. נתונות הפונקציות $g(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^3$, $h(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^4$.

מהו הסימן של המכפלה $g''(x)\cdot h''(x)$ עבור $x>0$? נמק.

תשובות סופיות:

1) 75 קמ"ש ב. $\frac{1}{2}$ שעה, 2.5 שעות.

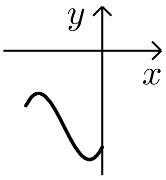
2) א. 1,064 ב. הוכחה ג. $a_1=56$ ד. 11,704

3) $\frac{1}{2}$ ב.i. $\frac{1}{2}$ ii. $\frac{31}{32}$

4) א. הוכחה ב. $\frac{9}{8}S$ ג. $\frac{1}{16}S$

5) א. (1). $TC=\frac{k}{2\cos\beta}$ ב. (1). $\beta=66.42°$ ב. (2). $\alpha=37.37°$

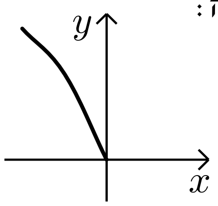
6) א. $m_{min}=-2.255\,,\ m_{max}=-0.866$ ב. להלן סקיצה:



ג. (1). קעירות כלפי מעלה: $-\frac{\pi}{12}<x<0\ ,\ -\frac{\pi}{2}<x<-\frac{5\pi}{12}$

קעירות כלפי מטה: $-\frac{5\pi}{12}<x<-\frac{\pi}{12}$

ג. (2). להלן סקיצה:



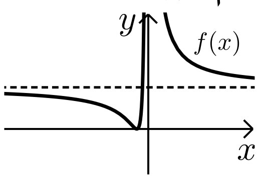
7) א. כל x ב. אי-זוגית ג. 4 ד. (1). הוכחה

ד. (2). $0<x<2$.

8) א. $x=0$ ב. הוכחה ג. (1). אין נקודות קיצון

ג. (2). יש 2 נקודות פיתול ד. (1). יש נקודת קיצון אחת

ד. (2). יש נקודת פיתול אחת ד. (3). להלן סקיצה:



ה. הסימן של המכפלה הוא חיובי $g''(x)\cdot h''(x)>0$

בגרות קיץ 2016 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) שני הטכנאים גל ודני עבדו בהרכבת מחשבים.
קצב העבודה של כל אחד מהם קבוע.

א. ביום העבודה הראשון הרכיבו שני הטכנאים אותו מספר של מחשבים.
גל התחיל לעבוד בשעה $8:00$, וסיים לעבוד בשעה $15:00$.
דני התחיל לעבוד לאחר השעה $8:00$ ולפני השעה $9:00$, וסיים לעבוד בשעה $13:00$. ידוע שגל ודני הרכיבו אותו מספר של מחשבים מהרגע שכל אחד מהם התחיל לעבוד ועד השעה $9:00$.
כמה זמן אחרי השעה $8:00$ התחיל דני לעבוד?

ב. ביום העבודה השני, התחילו גל ודני לעבוד באותה שעה וסיימו לעבוד באותה שעה. ביום זה הם הרכיבו סך הכל יחד את אותו מספר מחשבים שהרכיבו יחד ביום העבודה הראשון.
כמה זמן עבדו הטכנאים ביום העבודה השני?

2) נתונה סדרה חשבונית שיש בה n איברים.
הפרש הסדרה הנתונה הוא 3.

א. בין כל שני איברים עוקבים הכניסו איבר אחד נוסף, ונוצרה סדרה חשבונית חדשה.

(1) הראה כי היחס בין סכום האיברים בסדרה החדשה לסכום האיברים בסדרה הנתונה הוא $\frac{2n-1}{n}$.

(2) נתון כי היחס מופיע בתת-סעיף (1) שווה ל 1.9.
סכום של כל האיברים שהכניסו לסדרה הנתונה הוא 130.5.
מצא את האיבר הראשון בסדרה הנתונה.

ב. יוצרים סדרה חשבונית נוספת על ידי הכנסת k איברים בין כל שני איברים עוקבים של <u>הסדרה הנתונה</u>.
הבע באמצעות k את הפרש הסדרה המתקבלת.

3) שחמט הוא משחק בין שני שחקנים שיכול להסתיים בניצחון של אחד מהם או בתיקו. יעל ואנה משחקות זו מול זו בטורניר שחמט בשני סבבים. ההסתברות של כל אחת מן השחקניות לנצח במשחק בודד היא קבועה בכל הטורניר.

א. בסבב הראשון יש 4 משחקים.
ההסתברות שיעל תנצח ב-2 משחקים או ב-3 משחקים
גדולה פי 10 מן ההסתברות שיעל תנצח ב- 4 משחקים.
חשב את ההסתברות שיעל תנצח במשחק בודד.

בסבב השני יש 2 משחקים.
ההסתברות שתוצאת הסבב השני תהיה שוויון - היא 0.34.

ב. מהי ההסתברות שאנה תנצח במשחק בודד?

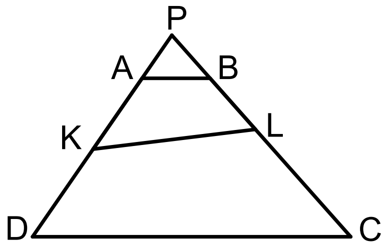
ג. חשב את ההסתברות שאנה תנצח במשחק השני, אם ידוע שתוצאת סבב זה היא שוויון.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתון משולש PDC.
הנקודות B ו-L מונחות על הצלע PC.
הנקודות A ו-K מונחות על הצלע PD, כמתואר בציור.
נתון כי המרובע ABLK הוא בר-חסימה במעגל
וגם המרובע KLCD הוא בר-חסימה במעגל.



א. הוכח: $AB \parallel DC$.

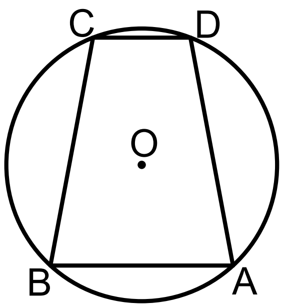
נתון: $PA=3$ ס"מ , $PB=4$ ס"מ,
שטח המשולש ABP הוא S סמ"ר.
שטח המשולש ABCD הוא $24S$ סמ"ר.

ב. האם אפשר לחסום במעגל את המרובע ABCD? נמק.

ג. מצא את אורך הצלע PD.

ד. נתון גם: $BL=5$ ס"מ.
היעזר בדמיון משולשים והבע באמצעות S את שטח המרובע KLCD.

5) במעגל חסום טרפז ABCD $(AB \parallel DC)$.
מרכז המעגל O בתוך הטרפז (ראה ציור).
רדיוס המעגל הוא R, וגובה הטרפז הוא h.
נתון: $\sphericalangle COD = \alpha$, $\sphericalangle BOA = 3\alpha$.



א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle DAB$.
ב. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו- R.
ג. הבע את האורך של שוק הטרפז באמצעות α ו- h.
ד. נתון כי שטח המשולש COD
הוא: $\dfrac{h^2}{12\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. מצא את α.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

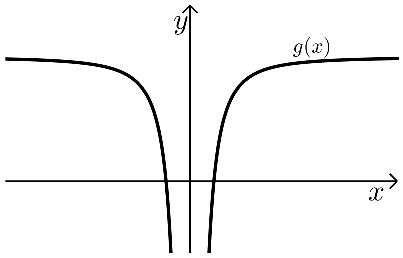
6) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{2\cos^2 x-1}{2\cos^2 x}$.

א. בתחום $0 \le x < \frac{\pi}{2}$:
(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.
(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה- x (אם יש כאלה).
(3) מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x (אם יש כאלה).
(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

ב. בתחום $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$:
(1) הראה שהפונקציה $f(x)$ היא זוגית.
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי ציר ה- y.

7) בסרטוט שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g(x)$.



הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרות לכל x השונה מ- 0, ואין להן נקודות קיצון או נקודות פיתול.

הישר $x=0$ הוא האסימפטוטה האנכית לכל אחד מן הגרפים של הפונקציות האלה.

א. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $g'(x)$. נמק את שיקוליך.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$. נמק את שיקוליך.

נתון כי השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת השנייה $g''(x)$, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x=1$ ו- $x=2$ שווה ל- 5.25.

ב. הישר $x=1$ חותך את הגרף של פונקציית הנגזרת $g'(x)$ בנקודה A, והישר $x=2$ חותך גרף זה בנקודה B.
מצא את ההפרש בין שיעור ה- y של הנקודה A ובין שיעור ה- y של הנקודה B. נמק.

ג. הביטוי $y=\frac{a}{x^3}$ מתאר אחת מן הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$. a הוא פרמטר גדול מ- 0.

(1) קבע איזו מן הפונקציות הביטוי מתאר. נמק את קביעתך.

(2) מצא את הערך של a.

8) במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle ABC=90^\circ)$ אורך היתר הוא k ס"מ (k הוא פרמטר).
הניצב AB הוא גם יתר במשולש ADB, שהוא שווה שוקיים וישר זווית $(\sphericalangle ADB=90^\circ)$.

א. סמן $AB=x$ והבע את BC באמצעות x ו- k.

ב. נתון כי הערך המקסימלי של המכפלה $BC\cdot AD^2$ הוא $3\sqrt{3}$.
מצא את שטח המשולש ADB (ערך מספרי), כאשר המכפלה $BC\cdot AD^2$ היא מקסימלית.

תשובות סופיות:

1) א. 20 דקות   ב. 5.6 שעות

2) א. (1). הוכחה   א. (2). $a_1 = 1$ ב. $d = \frac{3}{k+1}$

3) א. $\frac{1}{2}$ ב. 0.3   ג. $\frac{15}{34}$

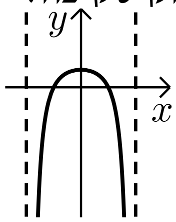
4) א. הוכחה   ב. לא   ג. 15 ס"מ   ד. 16S סמ"ר

5) א. $90° - \frac{\alpha}{2}$ ב. $2R\cos\alpha$ ג. $\frac{h}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ ד. $30°$

6) א. (1). $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ א. (2). $x = \frac{\pi}{2}$ א. (3). $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$, $(0, 0.5)$

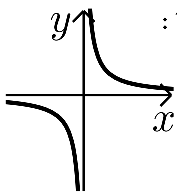
א. (4). $\max(0, 0.5)$

ב. (1). הוכחה   ב. (2). להלן סקיצה:

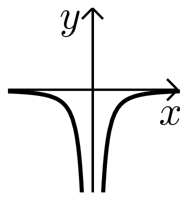


ג. 0.285

7) א. (1). להלן סקיצה:



א. (2). להלן סקיצה:



ב. 5.25   ג. (1) $g'(x)$ ג. (2) $a = 6$.

8) א. $\sqrt{k^2 - x^2}$ ב. 1.5 סמ"ר.

בגרות חורף 2017:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) שני צינורות א׳ ו-ב׳ מזרימים מים לבריכה בקצב קבוע.
כאשר צינור א׳ בלבד פתוח, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ב- m שעות.
כאשר צינור ב׳ בלבד פתוח, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ב- $2m$ שעות.
כאשר שני הצינורות פתוחים במקביל, הבריכה הריקה מתמלאת לגמרי ביותר מ-4 שעות. ביום מסוים הבריכה הייתה ריקה.
פתחו את צינור א׳ בלבד למשך שעתיים. אחר כך פתחו גם את צינור ב׳, ושני הצינורות היו פתוחים בו בזמן שעתיים נוספות.
בתום אותן שעתיים נוספות יותר מ-1/2 הבריכה הייתה מלאה.
מצא את תחום הערכים האפשריים של m.
ביום אחר 1/2 מהבריכה הייתה מלאה. פתחו את שני הצינורות, אלא שבשל תקלה טכנית צינור ב׳ רוקן מים מן הבריכה במקום למלא בה מים.
שני הצינורות היו פתוחים בו בזמן במשך שעה אחת, ובמהלכה צינור א׳ מילא מים בבריכה וצינור ב׳ רוקן ממנה מים. בתום אותה שעה תוקנה התקלה, ושני הצינורות החלו למלא את הבריכה יחד, עד שהיא התמלאה לגמרי כעבור שעתיים וחצי נוספות.
נתון שהקצב שבו צינור ב׳ מרוקן מים מהבריכה שווה לקצב שבו הוא ממלא אותה במים. מצא את m.

2) נתונה סדרה a_n המקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+3}$, $a_1=-1$.

נגדיר סדרה חדשה b_n : $b_n=\frac{1}{a_n}+2$.

א. הוכח כי b_n היא סדרה הנדסית.

ב. הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}$.

ג. נתון: n הוא מספר זוגי.
הבע באמצעות n את הסכום: $\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}$.

3) אביגיל משחקת במשחק של זריקת חצים למטרה.
הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד הוא p $(p>0)$ ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים. כל משתתף זורק 5 זריקות רצופות.
הסיכוי של אביגיל לפגוע במטרה בארבע זריקות מתוך החמש גדול פי 3 מן הסיכוי שלה לפגוע בה בכל חמש הזריקות.

א. מצא את p.

משתתף מנצח במשחק אם מתוך 5 זריקות רצופות, מספר הפגיעות שלו במטרה גדול ממספר ההחטאות שלו (יכול להיות יותר ממנצח אחד במשחק).

ב. מהי ההסתברות שאביגיל תנצח במשחק?

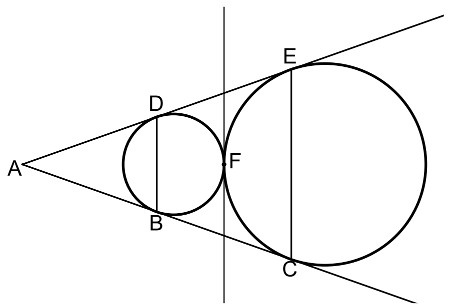
ג. (1) אם אביגיל תחטיא את המטרה בזריקה השנייה, מהי ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

(2) גם תמר משתתפת במשחק, וגם הסיכוי שלה לפגוע במטרה בניסיון בודד שווה ל- p ואינו תלוי בניסיונותיה הקודמים.
תמר החטיאה בזריקה הראשונה.
מה ההסתברות שהיא תנצח במשחק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



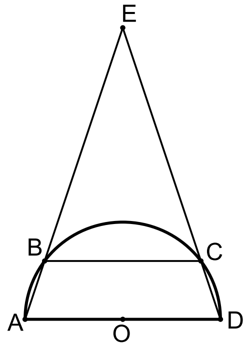
4) נתונים שני מעגלים בעלי רדיוס שונה, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה F.
AC משיק לשני המעגלים בנקודות B ו-C,
AE משיק לשני המעגלים בנקודות D ו-E,
כמתואר באיור.

א. הוכח שהמרובע BDEC הוא טרפז שווה שוקיים.

ב. המשיק המשותף למעגלים העובר בנקודה F חותך את שוקי הטרפז, BC ו-DE בנקודות G ו-H בהתאמה.
הוכח: GH הוא קטע אמצעים בטרפז.

ג. נסמן ב- R את רדיוס המעגל בגדול וב- r את רדיוס המעגל הקטן.
הוכח כי: $R\cdot BD=r\cdot CE$.

5) נתון טרפז ABCD $(BC \parallel AD)$
החסום בחצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R
כך ש-AD הוא קוטר של חצי המעגל.
המשכי השוקיים AB ו-DC נפגשים מחוץ למעגל
בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $\sphericalangle EAD = \alpha$.



א. הבע באמצעות R ו- α
את אורך הקטע BC.
ב. מהו התחום של כל הערכים האפשריים עבור הזווית α? נמק.
ג. נתון כי שטח משולש AED גדול פי 9 משטח משולש COD.
מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש AED לבין R?

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{ax^2+4x}{x^2+3x+b}$, a ו- b הם פרמטרים.
נתון: $y=1$, $x=1$ הן אסימפטוטות של הפונקציה.
א. מצא את a ו- b.
ב. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטות נוספות המאונכות לצירים
(מלבד $x=1$ ו- $y=1$)? הסבר.
(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. עבור אילו ערכי x מתקיים: $|f(x)|=-f(x)$? נמק.
ה. נגדיר $g(x)=f^2(x)\cdot f'(x)$.
הראה כי השטח מוגבל על ידי ציר ה- x, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$
ועל ידי הישר $x=0.5$ הוא $\frac{1}{3}$. נמק את תשובתך.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, a הוא פרמטר.

ענה על הסעיפים א-ו עבור $a>0$.

הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה (אם יש כאלה).

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ה. (1) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של גרף הפונקציה $f'(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.

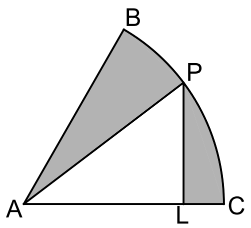
ו. מצא את ערך הביטוי: $\int_{-3a}^{-2a} f(x)dx+\int_{2a}^{3a} f(x)dx$.

ענה על סעיף ז עבור: $a=0$.

ז. (1) מצא את תחום ההגדרה של $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

8) נתונה גזרת עיגול BAC שהיא $\frac{1}{6}$ מעיגול שרדיוסו R ומרכזו A.



מנקודה כלשהי P, הנמצאת על הקשת BC, הורידו אנך ל-AC החותך את הרדיוס AC בנקודה L (ראה ציור).

השטח האפור שבציור הוא השטח הכלוא בין הקשת BC ובין הרדיוסים AB ו-AP, והקטעים LP ו-LC.

נתון שהשטח האפור המינימלי הוא $24\pi-36$.

א. (1) מצא את הזווית PAC שעבורה השטח האפור שמתקבל הוא מינימלי.

(2) מצא את R.

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש APL? נמק.

תשובות סופיות:

1) א. $6<m<10$ ב. 8.5

2) א. הוכחה ב. $S_n=\frac{3^n-1}{2}-2n$ ג. $S_n=\frac{1-3^n}{4}$

3) $\frac{5}{8}$ ב. 0.7248 ג. (1). 0.5188 ג. (2). 0.5188

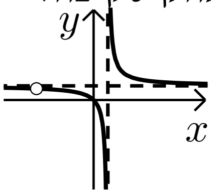
4) א. הוכחה ב. הוכחה ג. הוכחה

5) א. $-2R\cos 2\alpha$ ב. $45°<\alpha<90°$ ג. 1.59

6) א. $a=1\ ,\ b=-4$ ב. (1). $x\neq 1\ ,\ x\neq -4$ ב. (2). $(0,0)$

ב. (3). אין אסימפטוטות נוספות (יש חור ב- $(-4,0.8)$)

ב. (4). עלייה: אין, ירידה: $x>1$ או $-4<x<1$ או $x<-4$ ג. להלן סקיצה:

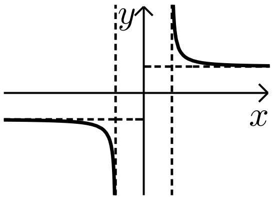


ד. $0\le x<1$ ה. הוכחה

7) א. $x>a$ או $x<-a$ ב. $x=a\ ,\ x=-a\ ,\ y=1\ ,\ y=-1$

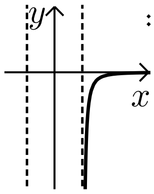
ג. עלייה: אין, ירידה: $x>a$ או $x<-a$

ד. להלן סקיצה:



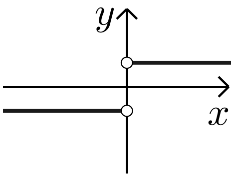
ה. (1). $x=a\ ,\ x=-a\ ,\ y=0$

ה. (2). להלן סקיצה:



ו. 0

ז. להלן סקיצה:



8) א. (1). $\frac{\pi}{4}$ א. (2). $R=12$ ב. 36.

בגרות קיץ 2017 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) נגה רכבה על אופניים במסלול באורך מסוים, בארבע מהירויות קבועות שונות.
בכל פעם, לאחר שעברה מקטע שאורכו רבע מן המסלול, היא הגבירה את מהירותה,
ורכבה במהירות הגדולה פי 2 מן המהירות הקודמת.
במקטע האחרון היא רכבה במהירות של 40 קמ"ש.
נגה יצאה לדרך בשעה 8:00 בבוקר וסיימה את המסלול בשעה 11:45 בבוקר.

א. מהו אורך המסלול?

ב. דניאל יצא לדרך באותו מסלול בשעה 9:45, ונסע במהירות קבועה לאורך כל המסלול. גם הוא הגיע לסוף המסלול בשעה 11:45.
באיזה מארבעת מקטעי המסלול פגש דניאל את נגה בפעם הראשונה, ובאיזו שעה?

2) נתונה הסדרה: $a_n = \frac{(2^n+1)(2^n-1)}{2^n}$.

b_n ו- c_n הן סדרות הנדסיות שכל איבריהן חיוביים,
המקיימות לכל n טבעי: $a_n = b_n - c_n$.

נתון: $c_3 = \frac{1}{8}$, $b_6 = 64$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את b_1 ואת המנה של הסדרה b_n.

(2) מצא את c_1 ואת המנה של הסדרה c_n.

את סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n נסמן ב- A_n,
את סכום n האיברים הראשונים בסדרה b_n נסמן B_n,
ואת סכום n האיברים הראשונים c_n נסמן ב- C_n.

ב. הראה ש- $\mathrm{C}_n = \mathrm{B}_n - \mathrm{A}_n$.

ג. עבור אילו ערכי n מתקיים האי שוויון $0.9 < \mathrm{B}_n - \mathrm{A}_n < 1$?

3) בבית אבות גדול יש לכמה מן הדיירים קלנועית, ולשאר אין.
אם בוחרים באקראי 9 דיירים מבית האבות הזה, ההסתברות של-4 מהם בדיוק יש קלנועית גדולה פי 24 מן ההסתברות של-6 מהם בדיוק יש קלנועית.

א. מהי ההסתברות שלדייר שנבחר באקראי יש קלנועית?

ב. בוחרים באקראי 6 דיירים מבית האבות.
ידוע שלפחות ל-3 מהם יש קלנועית.
מהי ההסתברות של-4 מהם בדיוק יש קלנועית?

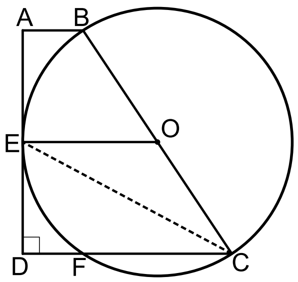
ג. בוחרים באקראי דיירים מבית האבות,
בזה אחר זה, עד של-3 מהם בדיוק יש קלנועית.
מהי ההסתברות שייבחרו בדרך זו בדיוק 6 דיירים?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתון מעגל O. ‏ABCD הוא טרפז ישר זווית ($AB \parallel CD$, $\sphericalangle ADC = 90°$).
הצלע AD משיקה למעגל בנקודה E, והנקודות B ו-C נמצאות על המעגל כך ש-BC הוא קוטר. הצלע DC חותכת את המעגל בנקודה F, כמתואר בציור.

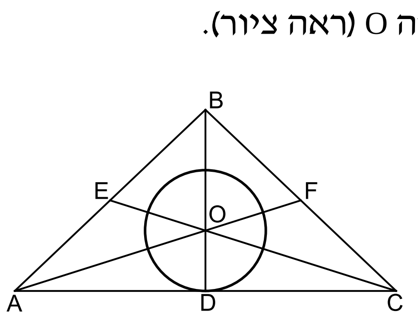


א. הוכח: $\sphericalangle BCD = 2\sphericalangle DEF$.

ב. הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta DEF$.

ג. הוכח: $BC = DF + DC$.

5) ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$).
AF, ‏CE ו-BD הם תיכונים במשולש, הנחתכים בנקודה O (ראה ציור).



א. הוכח: $S_{\Delta BOE} = S_{\Delta COD}$.

מעגל שמרכזו O משיק לצלע AC בנקודה D.
נתון כי שטח העיגול שווה לשטח המשולש AOC.

ב. חשב את גודל הזווית ACE.

ג. הבע את אורך הקטע OE באמצעות רדיוס המעגל.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x-5}{\sqrt{x^2-10x+24}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(5) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=f(x+5)$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) הוכח ש- $g(x)$ היא פונקציה אי זוגית.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. הסבר מדוע לכל $1<a<b$ מתקיים השוויון: $\int_{a+5}^{b+5} f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{2\sin x}{\cos^3 x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה $f(x)$.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

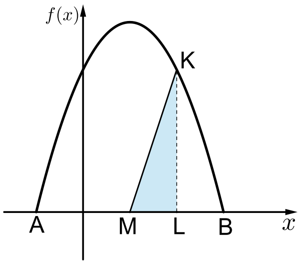
ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3\pi}{2}$.

ג. נתון: $0<a<\frac{\pi}{2}$ השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$,
הישר $x=a$ וציר ה- x שווה ל-1. מצא את a .

8) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה : $f(x)=-x^2+2x+c$ בתחום האי-שליליות שלה.

A ו-B הן נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x.

נתון : $x_A=-t$, $x_B=2t$, $(t>0)$.



א. מצא את t ואת c.

M היא נקודת החיתוך של ציר הסימטריה של הפרבולה עם ציר ה-x. K היא נקודה כלשהי על גרף הפונקציה $f(x)$ מעל לציר ה-x. מהנקודה K הורידו אנך לציר ה-x החותך את הקטע AB בנקודה L.

ב. מצא עבור אילו שיעורי x של הנקודה K שטח המשולש KLM הוא מקסימלי. מצא את שני הפתרונות האפשריים. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

תשובות סופיות:

1) א. 40 קמ"ש. ב. במקטע השני בשעה 10:30.

2) א. (1) $q_b=2$, $b_1=2$ (2) $q_c=\frac{1}{2}$, $c_1=\frac{1}{2}$ ב. הוכחה. ג. $n\geq 4$.

3) א. $p=\frac{1}{5}$ ב. 0.15534 ג. 0.04096.

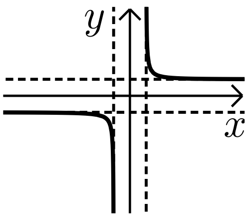
4) שאלת הוכחה.

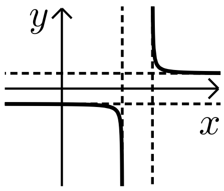
5) א. הוכחה. ב. $\measuredangle ACE=17.66°$ ג. $OE=\frac{R\sqrt{1+\pi^2}}{2}=1.648R$.

6) א. (1) $x<4$, $x>6$ (2) $(0,-1.02)$ (3) $y=-1$, $y=1$, $x=4$, $x=6$

(4) ירידה : $x<4$, $x>6$, עלייה : אף x. (5) להלן סקיצה:

ב. (1) הוכחה. (2) סקיצה:



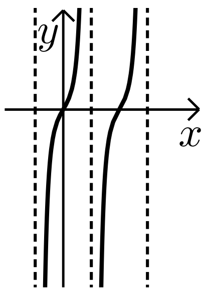


7) א. (1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$

(2) $(\pi k,0)$

(3) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ (4) $f(x)$ עולה לכל x בתחום הגדרתה.

ב. סקיצה בצד. ג. $a=\frac{\pi}{4}$.



8) א. $c=8$, $t=2$ ב. $x=1-\sqrt{3}$, $x=1+\sqrt{3}$.

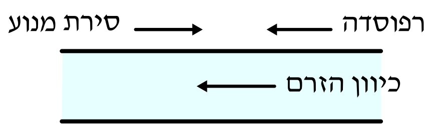
בגרות קיץ 2017 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה, גאומטריה אנליטית, הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) העיירות A ו-B נמצאות על גדת נהר הזורם במהירות קבועה.
כיוון הזרם הוא מ-A ל-B.
מן העיירה B יצאה סירת מנוע לכיוון העיירה A
הסירה שטה נגד כיוון הזרם.
באותו הזמן יצאה רפסודה מן העיירה A
לכיוון העיירה B. הרפסודה שטה עם כיוון הזרם.



מהירות סירת המנוע במים עומדים היא קבועה וגדולה פי 4 ממהירות הזרם של הנהר.
מהירות הרפסודה במים עומדים היא אפס. במים זורמים הרפסודה שטה עם הזרם.
הסירה והרפסודה נפגשו 3 שעות ו-45 דקות אחרי יציאתן לדרך והמשיכו בדרכן.
סירת המנוע הגיעה לעיירה A ומיד הסתובבה לשטה בחזרה לעיירה B. כאשר סירת המנוע הגיעה לעיירה B, הרפסודה הייתה במרחק של 35 ק"מ מן העיירה B.

א. חשב את מהירות הזרם ואת מהירות סירת המנוע במים עומדים.

ב. בדרך חזרה לעיירה B פגשה סירת המנוע את הרפסודה בפעם השנייה.
כמה זמן עבר מרגע יציאתה של הרפסודה מן העיירה A עד שהסירה והרפסודה נפגשו בפעם השנייה?

2) נתונה סדרה כללית a_n.

נסמן ב- S_n את סכום n האיברים הראשונים a_n.

נתון: $S_n = k - \frac{1}{3^{n+1}}$ לכל n טבעי. k הוא מספר קבוע.

א. הבע את a_1 ואת האיבר הכללי a_n עבור $n > 1$ באמצעות n ו-k במידת הצורך.

ב. מצא את k שעבורו הסדרה a_n היא סדרה הנדסית. נמק.

נגדיר: $T = a_2^2 + a_5^2 + a_8^2 + \dots$ (סכום ריבועי כל איבר שלישי בסדרה a_n החל ב-a_2).

ג. חשב את T.

3) בקופסה I יש 10 כדורים, כמה מהם כחולים והשאר אדומים,
ובקופסה II יש 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים אדומים.
מוציאים באקראי כדור מקופסה I. אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II.
אם יצא כדול כחול, מחזירים אותו לקופסה I.
שוב מוציאים באקראי כדור מקופסה I, ושוב, אם יצא כדור אדום, מעבירים אותו לקופסה II, ואם יצא כדור כחול, מחזירים אותו לקופסה I.
לאחר מכן מוציאים באקראי כדור אחד מקופסה II.

א. נתון כי ההסתברות שאחרי שתי ההוצאות בקופסה I יועבר כדור אדום אחד בלבד מקופסה I לקופסה II היא $\frac{19}{36}$.
חשב את מספר הכדורים הכחולים שהיו בקופסה I לפני ההוצאה הראשונה.

ענה על הסעיפים ב-ג עבור מספר הכדורים הכחולים שחישבת בסעיף א.

ב. מהי ההסתברות הכדור הוציאו מקופסה II הוא כדור אדום?

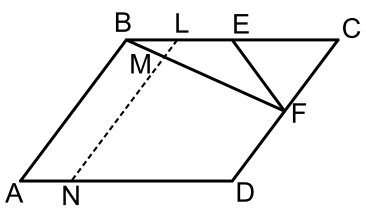
ג. ידוע שהכדור שהוציאו מקופסה II הוא כדור אדום.
מהי ההסתברות שאחרי שהוציאו את הכדור האדום מקופסה II נשארו בה שלושה כדורים אדומים בדיוק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) המרובע ABCD הוא מקבילית.
הזווית A היא זווית חדה.
הנקודה E היא אמצע הצלע BC והנקודה F היא אמצע הצלע CD (ראה ציור).



א. שטח המשולש ECF הוא S.
הבע את שטח המקבילית ABCD באמצעות S.
נמק את תשובתך.

ב. הנקודה L היא אמצע הקטע BE.
דרך הנקודה L העבירו ישר המקביל ל-AB וחותך את BF ואת AD בנקודות M ו-N בהתאמה. חשב את היחס $\frac{LM}{MN}$.

ג. נתון: $BE = EF$.
האם אפשר לחסום את המרובע ABFD במעגל? נמק את קביעתך.

5) ABCD הוא טרפז חסום במעגל ($AB \parallel CD$).

נתון: $AB = a$, $CD = b$, $(a < b)$, $\sphericalangle C = 60^\circ$.

א. הבע את שוקי הטרפז, BC ו-AD, באמצעות a ו-b.

נתון: $a = 4$, אורך האלכסון BD הוא $4\sqrt{7}$.

ב. חשב את b.

ג. (1) R הוא רדיוס המעגל החוסם את הטרפז. מצא את R .

(2) הסבר מדוע אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.

(3) r הוא רדיוס המעגל החסום בטרפז. מצא את r .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 8-6 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = a - \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2}$. a הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. הבע את תשובותיך באמצעות a במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את המשוואות של האסימפטוטות המאונכות לצירים.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה), וקבע את סוגן.

(4) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

נתון כי גרף הפונקציה $f(x)$ משיק לציר ה-x.

ב. מצא את a.

הצב את הערך של a שמצאת וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

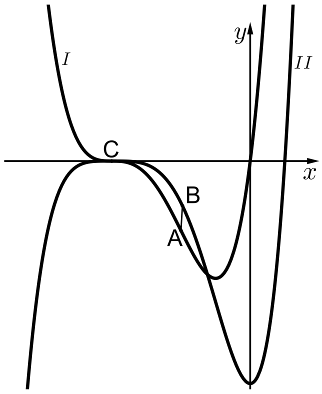
ד. נתונה הפונקציה: $g(x) = |f(x) + k|$.

ידוע שגרף הפונקציה $g(x)$ משיק לאסימפטוטה האופקית של גרף הפונקציה $f(x)$.

מצא את k (מצא את שתי האפשרויות). נמק את תשובתך.

7) לפניך הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$.

א. התאם בין הגרפים I ו-II לבין הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$. נמק.



נתון: $f'(x)=x(x+b)^3$. $b>1$ פרמטר.

לגרף הפונקציה $f(x)$ יש נקודת פיתול ב-$x=-1$.

ב. מצא את b.

C ו-D הן נקודות החיתוך של הפונקציות $f(x)$ ו-$f'(x)$

בתחום $x<0$ כמתואר בציור.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים I ו-II בהתאמה,

כך שהישר AB מאונך לציר ה-x.

נתון: $x_D<x_A<x_C$, $x_C=-4$, $x_D=1-\sqrt{5}$.

ג. מצא את שיעור ה-x של הנקודות A ו-B שעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי

(אפשר לפתור את הסעיף בלי למצוא את הפונקציה $f(x)$).

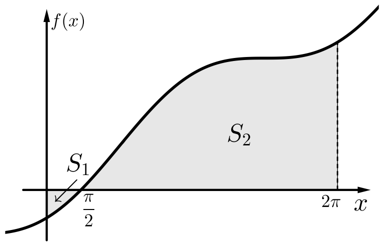
8) $f(x)$ היא פונקציה המוגדרת לכל x.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה-y בחלקו השלילי.

נקודת החיתוך היחידה של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x היא $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ (ראה ציור).

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי הצירים ועל ידי הישר $x=2\pi$

(השטח האפור בציור) שווה ל-$10\pi^2+16$.



נתון גם: $\int_0^{2\pi} f(x)dx=8\pi^2$.

א. מצא את השטח המוגבל על ידי

גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים

(השטח S_1 המסומן בציור).

הפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$. נתון: $F(0)=0$.

ב. מצא את $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

נתון: $f'(x)=8\sin x+8$.

ג. מצא את $f(x)$.

תשובות סופיות:

1) א. מהירות הזרם: 5 קמ״ש, מהירות הסירה: 20 קמ״ש. ב. 6.25 שעות.

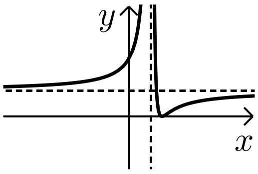
2) א. $a_n = \frac{2}{3^{n+1}}$, $a_1 = k - \frac{1}{9}$ ב. $k = \frac{1}{3}$ ג. $T = \frac{1}{182}$.

3) א. מספר הכדורים הכחולים הוא 5. ב. 0.3595. ג. 0.5338.

4) א. $S_{\mathrm{ABCD}} = 8S$ ב. $\frac{\mathrm{LM}}{\mathrm{MN}} = \frac{1}{7}$ ג. לא ניתן לחסום.

5) א. $\mathrm{AD} = \mathrm{BC} = b - a$ ב. $b = 12$ ג. (1) $R = 6.11$
(2) הוכחה. (3) $r = 2\sqrt{3}$.

6) א. (1) $x \neq 2$ (2) $y = a$, $x = 2$ (3) $\min(3, a-1)$
(4) עלייה: $x > 3$, $x < 2$, ירידה: $2 < x < 3$.
ב. $a = 1$ ג. להלן סקיצה:



ד. $k = -1$, $k = 1$.

7) א. $f'(x) : \mathrm{I}$, $f(x) : \mathrm{II}$
ב. $b = 4$ ג. $x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}} = -2$.

8) א. $S_1 = \pi^2 + 8$ ב. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\pi^2 - 8$ ג. $f(x) = -8\cos x + 8x - 4\pi$.

בגרות חורף 2018:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) בכפר נופש יש שתי בריכות: בריכה א׳ ובריכה ב׳.
הנפח של בריכה א׳ הוא V_1 והנפח של בריכה ב׳ הוא V_2.
את הבריכות ממלאים באמצעות 4 צינורות בעלי אותו הספק.
ביום כלשהו שתי הבריכות היו ריקות.
התחילו למלא את הבריכה א׳ באמצעות ארבעת הצינורות.
כאשר התמלאה בריכה א׳ לכדי $\frac{1}{6}$ מנפחה, העבירו אחד מן הצינורות לבריכה ב׳ והתחילו למלא אותה באמצעותו.
כאשר התמלאה בריכה א׳ עד למחציתה, העבירו עוד שני צינורות למילוי בריכה ב׳.
מילוי שתי הבריכות הסתיים באותו הזמן. כל הצינורות הזרימו מים ללא הפסקה עד שהתמלאו שתי הבריכות. חשב את היחס $\frac{V_1}{V_2}$.

2) a_n היא סדרה חשבונית שההפרש שלה, d, שונה מ-0.
נתון: $a_7 = -a_{17}$.

א. מצא את a_{12}.

ב. (1) האם קיים בסדרה איבר שערכו שווה ל- $-a_1$? נמק.
(2) מצא מספר טבעי n שעבורו סכום n האיברים הראשונים בסדרה שווה ל-0.

ג. האם קיים n טבעי שעבורו: $a_n \cdot a_{n+1} < 0$? אם כן – מלא n כזה, אם לא - נמק.

ד. האם אפשר לדעת כמה איברים שליליים יש בסדרה? נמק
(הבחן בין מקרים שונים).

3) למיכל יש קובייה מאוזנת, על שלוש מפאות הקובייה שלה כתוב המספר 2,
ועל שלוש הפאות האחרות כתוב המספר 4. לגלית יש קובייה מאוזנת אחרת.
על כל אחת מפאות הקובייה של גלית כתוב אחד מן המספרים : 1 או 3.
מיכל וגלית משחקות משחק בן חמישה סיבובים.
המשתתפת שתנצח במספר סיבובים רב יותר מחברתה, תנצח במשחק.
בכל סיבוב של המשחק כל אחת מהן מטילה את הקובייה שלה פעם אחת.
המנצחת בסיבוב היא השחקנית שהמספר שהתקבל על הקובייה שלה גבוה יותר.
נתון שבסיבוב יחיד הסיכוי של מיכל לנצח את גלית הוא $\frac{7}{12}$.

א. על כמה פאות בקובייה של גלית כתוב המספר 1? נמק את תשובתך.

ב. מהו הסיכוי שגלית תנצח במשחק?

ג. מהו הסיכוי של גלית לנצח במשחק, אם ידוע שהיא ניצחה בסיבוב הראשון?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

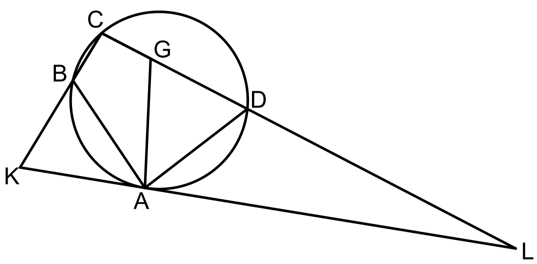
4) המרובע ABCD חסום במעגל.
הנקודה G נמצאת על הצלע CD כך ש- $AB = AG$ וגם $CB = CG$.
המשיק למעגל בנקודה A חותך את המשך הצלע CD בנקודה L
וחותך את המשך הצלע CB בנקודה K (ראה ציור).

א. הוכח כי $AD = AG$.

ב. (1) הוכח כי $\Delta ABK \sim \Delta CDA$.

(2) הוכח כי $AD^2 = BK \cdot CD$.

ג. הראה כי $\frac{LA}{AK} = \frac{S_{\Delta LDA}}{S_{\Delta KAB}}$.

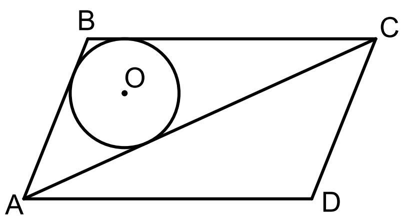


5) נתונה מקבילית ABCD. AC הוא האלכסון הארוך, כמתואר בציור.
במשולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.
נתון : הנקודה O נמצאת במרחקים 6 ו-3 מן הישרים AD ו-AC בהתאמה, $OA = 10$.

א. חשב את גודלי זוויות המקבילית.

ב. חשב את אורך האלכסון AC.

ג. חשב את שטח המקבילית.



פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונות הפונקציות $f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$, $g(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}$.

ענה על סעיף א עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המאונכות לציר ה-x.

(3) מלא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה גם על סעיף ב עבור התחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \pi$.

ב. (1) מלא את תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(2) הוכח: $g(x)=-f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.
תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ג. מצא את ערך הביטוי $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$. נמק את תשובתך.

7) נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-a}$. a הוא פרמטר $a\neq 0$, $a\neq 4$.

ענה על סעיף א. הבע באמצעות a במידת הצורך.

הבחן בין $a>0$ ובין $a<0$ במידת הצורך.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(3) מצא את משוואת האסימפטוטה של הפונקציה $f(x)$ המקבילה לציר ה-x.

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לציר ה-x (אם יש כאלה).

ענה על סעיף ב. הבע באמצעות a במידת הצורך.

הבחן בין $a>4$ ובין $a<4$ במידת הצורך.

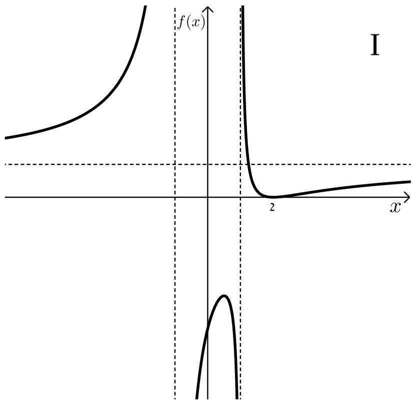
ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ג. לפניך שלושה גרפים אפשריים של הפונקציה $f(x)$, כל אחד עבור ערך אחר של a.

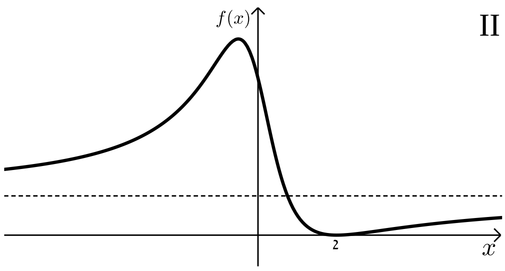
כתוב מהו תחום הערכים של a המתאים לכל אחד מן הגרפים I-III.

נמק את תשובתך.

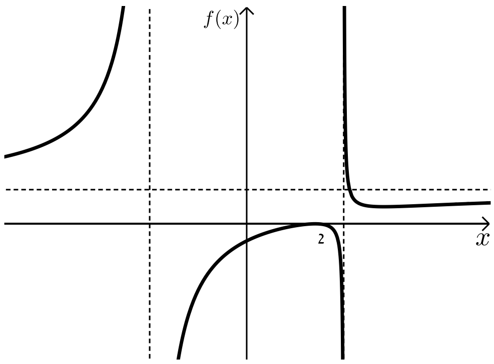
I



II



III



8) נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^3}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=t$.

נתון: $1\le t\le 5$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y בנקודה B.

הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מצא את שיעורי ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מינימלי.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודת ההשקה שעבורו סכום ניצבי המשולש AOB הוא מקסימלי.

תשובות סופיות:

1) $\frac{V_1}{V_2}=\frac{18}{29}$.

2) א. $a_{12}=0$.   ב. (1) כן, $a_{23}=-a_1$.   (2) $n=23$.   ג. לא

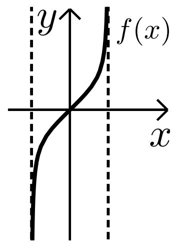
ד. אם האיבר הראשון שלילי, הסדרה עולה: 11 איברים שליליים.
אם האיבר הראשון חיובי, הסדרה יורדת: לא ניתן לדעת.

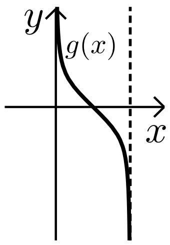
3) א. על פאה אחת   ב.0.3466.   ג. 0.5533.

4) א. הוכחה   ב. (1) הוכחה
ב. (2) הוכחה   ג. הוכחה

5) א. $54.33°$, $125.67°$.   ב. $AC=27.08$.   ג. $S_{ABCD}=171.73$.

6) א. (1) $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$.   (2) $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$.   (3) עלייה: $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, ירידה: אין
(4) להלן סקיצה: ב. (1) $0<x<\pi$.   (2) הוכחה   (3) להלן סקיצה: ג. 0





S

7) א. (1) עבור $a<0$: כל x. עבור $a>0$: $x\neq\sqrt{a}$, $x\neq-\sqrt{a}$.
(2) $(2,0)$, $\left(0,-\frac{4}{a}\right)$.   (3) $y=1$.
(4) עבור $a<0$: אין. עבור $a>0$: $x=\sqrt{a}$, $x=-\sqrt{a}$.

ב. עבור $a>4$: $\min\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$, $\max(2,0)$, עבור $a<4$: $\min(2,0)$, $\max\left(\frac{a}{2},\frac{a-4}{a}\right)$.

ג. I : $a>4$. II : $a<0$. III : $0<a<4$.

8) א. $x=\sqrt{3}$.   ב. $x=5$.

בגרות קיץ 2018 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה הסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) שני רוכבי אופניים, אמיר ומשה, יצאו בשעה 6:00 זה לכיוונו של זה.
אמיר רכב במהירות קבועה מעיר א לעיר ב, ומשה רכב במהירות קבועה מעיר ב לעיר א. אמיר ומשה עברו זה על פני זה, והמשיכו כל אחד ליעדו. אמיר הגיע לעיר ב שעתיים אחרי שעבר על פני משה, ואילו משה הגיע לעיר א 8 שעות אחרי שעבר על פני אמיר.

א. באיזו שעה עברו אמיר ומשה זה על פני זה?

נסמן את מהירות נסיעתו של אמיר באות V.
בדיוק כאשר עברו אמיר ומשה זה על פני זה, יצאה יסמין, רכובה על אופנוע, מעיר א לעיר ב, במהירות קבועה. נתון שיסמין הגיעה לעיר ב אחרי אמיר, אך לפני שמשה הגיע לעיר א.

ב. (1) הבע באמצעות V את המרחק בין עיר א לעיר ב.
(2) הבע באמצעות V את טווח המהירויות האפשרי של יסמין.

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית מתכנסת שסכומה שלילי.

a_1 הוא האיבר הראשון בסדרה, ו-q היא מנת הסדרה.

א. לפניך ארבע טענות (I-IV). רק אחת מהן בהכרח נכונה. ציין את מספרה ונמק.

I. $q<0$

II. $a_1<0$ וגם $q<0$

III. $a_1<0$

IV. $a_1>0$ או $q<0$

נסמן ב-T את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בסדרה a_n,
ונסמן ב-R את סכום האיברים במקומות הזוגיים בסדרה a_n.
p הוא פרמטר. נתון: $T+p\cdot R=0$.

ב. הבע את p באמצעות q.

b_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא p.

ג. האם b_n היא סדרה מתכנסת? נמק.

ד. נתון: p שלילי. הראה שלכל n טבעי, $a_{n+1}>a_n$
(כלומר, הראה שהסדרה a_n היא סדרה עולה).

3) בעיר גדולה נערך מבחן לכל תלמידי התיכון. 37% מהתלמידים שניגשו למבחן נעזרו בחבריהם כדי להתכונן למבחן. $\frac{35}{37}$ מהם עברו את המבחן.
מספר התלמידים שלא נעזרו בחבריהם ולא עברו את המבחן קטן פי 5 ממספר התלמידים שנעזרו בחבריהם ועברו את המבחן.

א. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן, והתברר שהוא לא עבר את המבחן.
מהי ההסתברות שהוא נעזר בחבריו?

ב. יעל והדס ניגשו למבחן.
ידוע שיעל נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן, והדס לא נעזרה בחבריה כדי להתכונן למבחן.
האם ההסתברות שיעל עברה את המבחן גבוהה מההסתברות שהדס עברה את המבחן? נמק.

ג. בחרו באקראי 6 תלמידים שניגשו למבחן.
מהי ההסתברות שבדיוק שליש מהם לא נעזרו בחבריהם ועברו את המבחן?

ד. בחרו באקראי תלמיד שניגש למבחן.
מהי ההסתברות שהוא מקיים לפחות אחת משתי הטענות I-II:
I. התלמיד נעזר בחבריו.
II. התלמיד לא עבר את המבחן.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

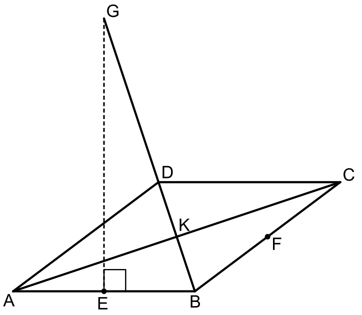
4) ABCD הוא מעוין. E ו-F הן אמצעי הצלעות AB ו-BC, בהתאמה.
הנקודה K היא מפגש האלכסונים של המעוין. מהנקודה E העלו אנך ל-AB, החותך את המשך האלכסון BD בנקודה G (ראה ציור).

א. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABC.
הקטע GF חותך את האלכסון AC בנקודה M, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

ב. הוכח שהמשולשים MFC, BKC ו-BFG דומים זה לזה.
נסמן ב- R את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC,
וב- r את רדיוס המעגל החוסם את המשולש BDC.

ג. (1) הוכח כי $\frac{MF}{CF}=\frac{MC}{GB}$, וכי $\frac{MF}{CF}=\frac{BK}{CK}$.

(2) הראה כי היחס בין אלכסוני המעוין שווה ל- $\frac{r}{R}$.



5) ABC הוא משולש ישר זווית $(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$.

M היא נקודה על היתר, כך ש- $AM:MC = \sqrt{3}:4$. נתון: $\sphericalangle ABM = 30^\circ$, $BM = 8$.

א. (1) סמן $MC = 4x$ וחשב את זוויות המשולש ABC.

(2) חשב את הרדיוסים של המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו-CMB.

ב. נסמן את מרכזי המעגלים החוסמים את המשולשים ABM ו-CBM

ב- O_1 ו- O_2, בהתאמה.

(1) הסבר מדוע המרובע BO_1MO_2 הוא דלתון.

(2) חשב את אורך הקטע O_1O_2 .

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה $f(x) = \dfrac{ax-1}{\sqrt{ax^2-2x+1}}$. a הוא פרמטר.

נתון: הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x.

א. הוכח: $a > 1$.

ענה על סעיף ב. אם יש צורך, הבע באמצעות a.

ב. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) כתוב את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$, המקבילות לציר ה- x.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: $a = 3$.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x,

ועל ידי הישרים $x = \frac{2}{3}$ ו- $x = 2$.

ד. $g(x)$ היא פונקציה רציפה המוגדרת לכל x.

נסמן ב- S את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי ציר ה- x,

ועל ידי הישרים $x = \frac{1}{3}$ ו- $x = b$ $\left(b > \frac{1}{3}\right)$.

נתון: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי גרף הפונקציה $g(x)$,

ועל ידי הישרים $x=\frac{1}{3}$ ו- $x=b$, שווה ל- $2S$ בעבור כל b.

הבע את $g(x)$ באמצעות $f(x)$ בתחום $x>\frac{1}{3}$ (כתוב את שתי האפשרויות).

7) $f(x)$ היא פונקציה גזירה, המוגדרת לכל x, כך ש- $f(x)\neq 0$ לכל x.

א. הוכח שאם הפונקציה $f(x)$ עולה בקטע מסוים,

אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ יורדת באותו הקטע;

ואם הפונקציה $f(x)$ יורדת בקטע מסוים, אז הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ עולה באותו הקטע.

נתונה הפונקציה $g(x)=\sin^2 x+\cos x+2$, המוגדרת לכל x.

ב. האם קיים x שבעבורו $g(x)=0$? נמק.

ג. (1) האם הפונקציה $g(x)$ היא פונקציה זוגית? נמק.

(2) הראה שלכל x מתקיים: $g(x)=g(x+2\pi)$.

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ בתחום $0\leq x\leq \pi$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ בתחום $-\pi\leq x\leq 3\pi$.

נתונה הפונקציה: $h(x)=\frac{1}{\sin^2 x+\cos x+2}$.

ענה על סעיף ד. תוכל להיעזר בתשובותיך על הסעיפים הקודמים.

ד. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$? נמק.

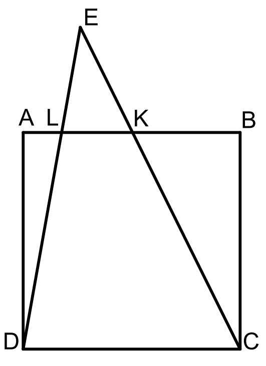
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $-\pi\leq x\leq \pi$, באותה מערכת צירים שבה סרטטת את גרף הפונקציה $g(x)$.

8) ABCD הוא ריבוע שאורך צלעו 6 ס"מ.

K ו-L הן נקודות על הצלע AB.

נתון כי הישרים CK ו-DL חותכים זה את זה בנקודה E, הנמצאת מחוץ לריבוע ABCD (ראה איור).

נסמן: $LK=x$.



א. הבע באמצעות x את גובה המשולש KLE.

ב. עבור איזה ערך של x סכום שטחי המשולשים BCK, ADL ו-KLE הוא מינימלי? נמק.

תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

תשובות סופיות:

1) א. אמיר ומשה עברו זה על פני זה בשעה $10:00$.

ב. (1) $6V$ (2) x : מהירותה של יסמין. $\frac{3}{4}V < x < 3V$

2) א. טענה III (סכום הסדרה הוא $\frac{a_1}{1-q}$, כמו כן : $-1<q<1$, לכן כש- a_1 שלילי, הסכום שלילי).

ב. $P=-\frac{1}{q}$ ג. לא מתכנסת ($p>1 \leftarrow -1<q<1$ או $p<-1$). ד. הוכחה.

3) א. $\frac{2}{9}$ ב. כן $\left(\frac{35}{37}>\frac{56}{63}\right)$ ג. 0.1763 ד. 0.44

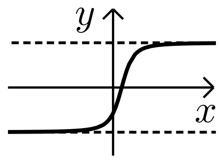
4) א+ב+ג. (2+1) הוכחה.

5) א. (1) $53.13°$, $36.87°$, $90°$ (2) 5 יח"א $= R_{\Delta ABM}$, $6\frac{2}{3}$ יח"א $= R_{\Delta CBM}$.

ב. (1) 5 יח"א $= BO_2 = MO_2$, $6\frac{2}{3}$ יח"א $= BO_2 = MO_2$ (2) $8\frac{1}{3}$ יח"א.

6) א. הוכחה ב. (1) $\left(\frac{1}{a},0\right)$ $(0,-1)$ (2) $y=\sqrt{a}$, $y=-\sqrt{a}$ (3) עולה לכל x.

(4)



ג. 2 ד. $g(x)=-f(x)$, $g(x)=3f(x)$

7) א. הוכחה.

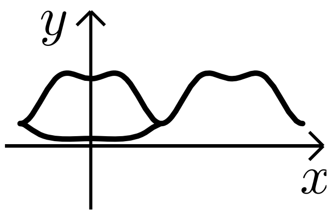
ב. לא ($2+\sin^2 x \geq 2$, $\cos x \geq -1$, לכן סכומם גדול מ-1 או שווה לו ולכן לא יכול להיות שווה 0).

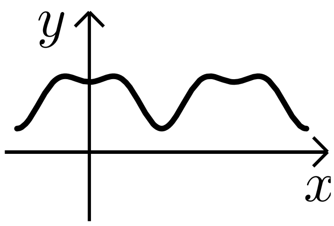
ג. (1) כן ($\sin^2 x$ ו- $\cos x$ הן פונקציות זוגיות). (2) הוכחה.

(3) $(0,3)$ מינימום, $\left(\frac{\pi}{3},3\frac{1}{4}\right)$ מקסימום, $(\pi,1)$ מינימום. (4) להלן סרטוט :

ד. (1) כל x.

(2)





8) א. $\frac{6x}{6-x}$ ב. $6-3\sqrt{2}$ סמ"ר.

בגרות קיץ 2018 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) המרחק מביתה של רננה עד בית הספר הוא 500 מטרים.
רננה יצאה מביתה אל בית הספר והלכה במהירות קבועה.
3 דקות לאחר שיצאה מביתה, יצא משם אביה בעקבותיה כדי להביא לה כריך ששכחה.
הוא רץ במהירות קבועה של 2.5 מטרים לשנייה.
כאשר הגיע האב לרננה הם עמדו ושוחחו במשך 2 דקות והוא נתן לה את הכריך,
ולאחר מכן הלך כל אחד מהם לדרכו – רננה לבית הספר והאב בחזרה אל הבית.
רננה המשיכה ללכת באותה המהירות שהלכה לפני כן, והאב הלך במהירות של 1.5 מטרים לשנייה.
אביה של רננה הגיע אל הבית בדיוק באותו הזמן שהגיעה רננה אל בית הספר.

א. חשב את מהירות ההליכה של רננה.

ב. כמה זמן עבר מן הרגע שרננה יצאה מביתה ועד שהגיעה אל בית הספר?

2) הסדרה a_n מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $a_{n+1}=-\frac{c^{n-2}}{a_n}$, $a_1=-\frac{1}{c}$.

נתון: $c>0$.

א. הוכח כי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות האי-זוגיים מהווים סדרה הנדסית, וכי האיברים בסדרה a_n הנמצאים במקומות הזוגיים מהווים גם הם סדרה הנדסית.

ב. (1) רשמו את 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .
הבע את תשובתך באמצעות c אם יש צורך.

(2) הבע באמצעות c את סכום 7 האיברים הראשונים בסדרה a_n .

(3) הוכח שלכל n טבעי, הסכום של $2n-1$ האיברים הראשונים בסדרה a_n אינו תלוי ב-n.

ג. הסדרה b_n מוגדרת באופן הזה: $b_n=-\frac{2}{a_n\cdot a_{n+1}}$.

(1) הראה כי b_n היא סדרה הנדסית.

(2) מהו תחום הערכים של c שבעבורם b_n היא סדרה הנדסית יורדת?

(3) נתון שהסדרה האינסופית b_n היא סדרה יורדת.
הבע באמצעות c את סכומה.

3) במבחן רב-ברירה ("אמריקני") יש 5 שאלות.
לכל שאלה מוצגות 4 תשובות, אך רק אחת מהן נכונה.
התלמידים צריכים לסמן תשובה אחת מבין 4 התשובות המוצגות.
תלמיד שמסמן את התשובה הנכונה על השאלה מקבל 20 נקודות לשאלה זו.
כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 60 נקודות סך הכול.

א. על 2 מן השאלות ידע שחר בוודאות לענות את התשובות הנכונות וסימן אותן.
בשאר השאלות הוא סימן באקראי תשובה אחת בכל שאלה.
(1) מהי ההסתברות ששחר יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?
(2) מהי ההסתברות ששחר יעבור את המבחן?

ב. על 2 מן השאלות ידע דניאל בוודאות לענות את התשובות הנכונות וסימן אותן.
בכל אחת משלוש השאלות האחרות ידע דניאל בוודאות שתשובה אחת, מבין 4 התשובות המוצגות, אינה נכונה, ולכן סימן באקראי אחת מן התשובות האחרות בכל שאלה. מהי ההסתברות שדניאל יצבור במבחן בדיוק 60 נקודות?

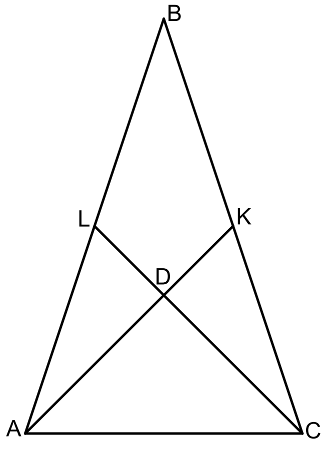
ג. על 3 מן השאלות ידעה הדס בוודאות לענות את התשובות הנכונות וסימנה אותן.
בכל אחת משתי השאלות האחרות היא ידעה בוודאות ש-k מבין 4 התשובות המוצגות אינן נכונות, וסימנה באקראי אחת מן התשובות הנכונות בכל שאלה.
ידוע שההסתברות שהדס תצבור בדיוק 60 נקודות במבחן שווה להסתברות שהיא תצבור 100 נקודות במבחן. מצא את k. נמק.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = BC)$.
AK ו-CL הם תיכונים במשולש, החותכים זה את זה בנקודה D.
נתון: $AK \perp CL$.



א. הוכח: $BD = AC$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{BLDK}}{S_{\Delta ABC}}$.

ג. M הוא מרכז המעגל החוסם את המרובע ALKC.
(1) הוכח: $\sphericalangle AML = 90^\circ$.
(2) מצא את היחס $\frac{AM}{AD}$.
תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

5) ABC הוא משולש שווה שוקיים $(AB = AC)$. BD הוא חוצה זווית במשולש ABC.
המשך הקטע BD חותך את המעגל החוסם את המשולש ABC בנקודה E.
גודל הזווית ABC הוא 2β.

א. הבע באמצעות β את $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$, היחס בין שטח המשולש ABC
ובין שטח המשולש ADE. אין צורך לפשט את הביטוי שקיבלת.

נתון: BE שווה בארכו לרדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta ADE}}$.

נסמן ב- a את אורך השוק AB.

ג. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החסום על ידי המשולש ABC.
בתשובותיך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

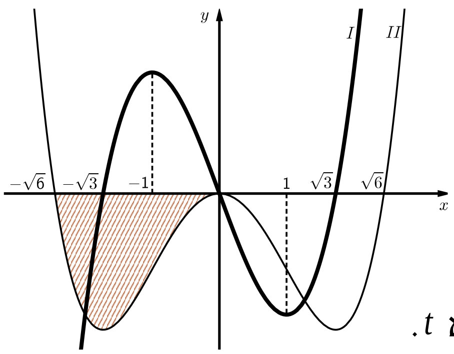
שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) לפניך הגרפים של הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$
(פונקציית הנגזרת הראשונה ופונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$)
בתחום $-2.5 \le x \le 2.5$. שני הגרפים עוברים בראשית הצירים.

א. התאם בין הגרפים I ו-II ובין הפונקציות $f'(x)$ ו- $f''(x)$. נמק.

ב. (1) כמה נקודות קיצון פנימיות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק.

(2) כמה נקודות פיתול יש לפונקציה $f(x)$ בתחום המתואר בגרף? נמק.



ג. עבור איזה ערך של x, בתחום $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$,
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הנגזרת, $f'(x)$,
הוא מינימלי?

נתון: $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתון: ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודת המקסימום שלה הוא t.

ה. הבע באמצעות t את השטח המוגבל על ידי גרף II
ועל ידי החלק השלילי של ציר ה- x (השטח המקווקו בציור).

ו. נתון: קיימים a, b ו- c ממשיים כך ש- $f(x) = ax^5 + bx^3 + c$.

מצא את c ואת היחס $\frac{a}{b}$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

ענה על הסעיפים ב-ה עבור התחום $x \ge \frac{2}{7}$.

ב. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

ג. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ד. לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית.

מצא את משוואת האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f(x)$.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ענה על סעיף ו עבור התחום $x>0$.

ו. נסתכל על נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x .

לפניך שלוש טענות (1-3). אחת מהן נכונה. איזו מהן היא הנכונה? נמק.

(1) ככל שמתקרבים ל- $x=0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וקטן.

(2) המרחק בין כל שתי נקודות חיתוך סמוכות נשאר קבוע.

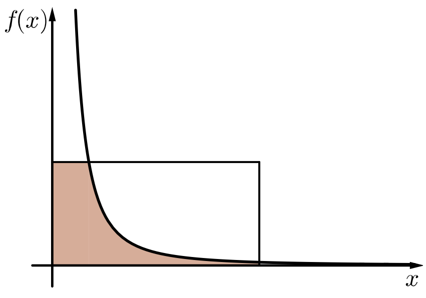
(3) ככל שמתקרבים ל- $x=0$, המרחק בין שתי נקודות חיתוך סמוכות הולך וגדל.

8) בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x^2}$ בתחום $x>0$,

ומלבן ששתיים מצלעותיו נמצאות על הצירים והוא נמצא ברביע הראשון.

נתון: שטח המלבן הוא 4.

נסמן ב- a את אורך צלע המלבן שנמצאת על ציר ה- x . נתון: $a \ge \frac{1}{4}$.



א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי הצירים, על ידי צלעות המלבן ועל ידי גרף הפונקציה $f(x)$ (השטח המקווקו בציור).

ב. עבור איזה ערך של a השטח שמצאת בסעיף א הוא מקסימלי?

תשבות סופיות:

1) א. 1 מטר לשנייה. ב. 620 שניות ($10\frac{1}{3}$ דקות).

2) א. הוכחה. ב. (1)

$$a_1=-\frac{1}{c}\ ,\ a_2=1\ ,\ a_3=-1\ ,\ a_4=c\ ,\ a_5=-c\ ,\ a_6=c^2\ ,\ a_7=-c^2$$

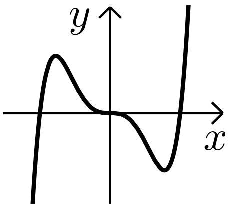
(2) $S_7=-\frac{1}{c}$ (3) הוכחה. ג. (1) הוכחה (2) $c>1$ (3) $S=\frac{2c^2}{c-1}$

3) א. (1) $\frac{27}{64}$ (2) $\frac{37}{64}$ ב. $\frac{4}{9}$ ג. $k=2$

4) א. הוכחה. ב. $\frac{S_{\text{BLDK}}}{S_{\text{ABC}}}=\frac{1}{3}$ ג. (1) הוכחה. (2) $\frac{\text{AM}}{\text{AD}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=0.79$

5) א. $\frac{S_{\Delta\text{ABC}}}{S_{\Delta\text{ADE}}}=\frac{\sin 2\beta\sin 4\beta\sin 3\beta}{\sin^3\beta}$ ב. 20.99 ג. $r=0.16a$

6) א. $f'(x):II,\ f''(x):I$ ב.(1) 2 (כמספר נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה-x).
(2) 3 (כמספר נקודות החיתוך של $f'(x)$ עם ציר ה-x). ד.

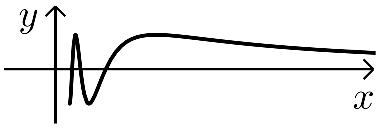


ג. $x=1$ ה. $S=t$ ו. $c=0$,$\frac{a}{b}=-\frac{1}{10}$,

7) א. $x\neq 0$ ב. $(1,0)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $\left(\frac{1}{3},0\right)$

ג. $(2,1)$ מקסימום, $\left(\frac{2}{3},-1\right)$ מינימום, $\left(\frac{2}{5},1\right)$ מקסימום, $\left(\frac{2}{7},-1\right)$ מינימום.

ד. $y=0$ ה.



ו. i.

8) א. $S=\frac{4\sqrt{a}-1}{a}$ ב. $a=\frac{1}{4}$

בגרות חורף 2019:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) קבוצת פועלים, חוטבי עצים מנוסים, תכננה לכרות 216 מ״ק עץ במספר ימים מסוים (ההספק של הפועלים הוא קבוע).
בשלושת הימים הראשונים עבדו הפועלים על פי ההספק המתוכנן. החל מן היום הרביעי הם הגבירו את קצב עבודתם ומדי יום כרתו 8 מ״ק עץ יותר מן המתוכנן.
הם עבדו בפועל יום אחד פחות ממספר הימים המתוכנן, וכרתו 232 מ״ק עץ סך הכול.

א. (1) על פי התכנון, כמה מ״ק עץ היו אמורים הפועלים לכרות ביום?
(2) כמה ימים עבדו הפועלים בפועל?

ב. במהלך איזה יום מתחילת העבודה סיימו הפועלים לכרות $\frac{2}{3}$ מן הכמות המתוכננת?

לאחר מכן הוצמד פועל מתלמד לכל פועל מנוסה בקבוצה, וכן נוצרה קבוצה חדשה ובה $2m$ פועלים סך הכול (m מנוסים ו- m מתלמדים).
ההספק היומי של הפועלים המנוסים הוא ההספק היומי המתוכנן. כל הפועלים המנוסים עובדים באותו הספק יומי.
ההספק היומי של פועל מתלמד קטן ב-1 מ״ק מן ההספק היומי של פועל מנוסה.
הקבוצה החדשה עבדה 8 ימים.

ג. (1) בטא את ההספק היומי של פועל מנוסה יחיד ושל פועל מתלמד יחיד באמצעות m.
(2) כמה פועלים יש בקבוצה החדשה אם ידוע שהם כרתו 336 מ״ק עץ סך הכול?

2) נתונה סדרה חשבונית $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \dots\ ,\ a_{2n+3}$ ובה $2n+3$ איברים (n הוא מספר טבעי).
סכום הסדרה גדול פי 43 מן האיבר האמצעי. האיבר האמצעי שונה מ-0.

א. (1) הראה כי סכום הסדרה שווה ל- $(2n+3)\cdot a_{n+2}$.

(2) מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. ידוע כי בסדרה הנתונה סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים גדול ב-40 מסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(1) מצא את האיבר האמצעי.

(2) מצא את סכום הסדרה.

נתון כי הפרש הסדרה הנתונה הוא $-a_1$.

ג. קבע האם הסדרה עולה או יורדת.

מכל איברי הסדרה הנתונה בונים סדרה חדשה על ידי חיבור של כל k איברים סמוכים (k הוא מספר טבעי) באופן הזה:

$$(a_1+a_2+\dots+a_k)\ ,\ (a_2+a_3+\dots+a_{k+1})\ ,\ (a_3+a_4+\dots+a_{k+2})\ ,\ \dots$$

ד. הבע באמצעות k את מספר האיברים בסדרה החדשה.

3) בבית ספר תיכון ניגשים תלמידי שכבת י"ב לבחינת המתכונת באזרחות ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות.
נתון: גם בשנת 2017 וגם בשנת 2018 מספר התלמידים שעברו את בחינת המתכונת ונכשלו בבחינת הבגרות היה שווה למספר התלמידים שנכשלו בבחינת המתכונת ועברו את בחינת הבגרות.

א. בשנת 2017 ניגשו 250 תלמידים לבחינת המתכונת ולאחר מכן לבחינת הבגרות באזרחות. ידוע שאם תלמיד עבר את בחינת המתכונת, ההסתברות שהוא עבר את בחינת הבגרות היא 0.9. שיעורם של הנכשלים בבחינת הבגרות מכלל התלמידים שניגשו לבחינות בשנה זו היה 20%.

(1) מהו מספר התלמידים שעברו גם את בחינת המתכונת וגם את בחינת הבגרות?

(2) ידוע שתלמיד מסוים נכשל בבחינת המתכונת.
מהי ההסתברות שאותו תלמיד עבר את בחינת הבגרות?

(3) בוחרים באקראי (עם החזרה) שני תלמידים שנכשלו בבחינת הבגרות.
מהי ההסתברות ששניהם נכשלו גם בבחינת המתכונת?

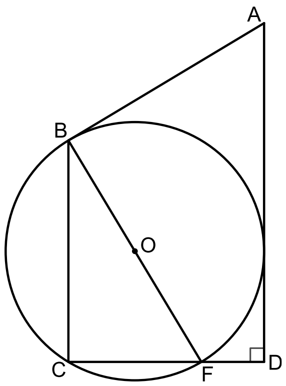
ב. נתון כי בשנת 2018 לא הייתה תלות בין המאורע "עובר את בחינת המתכונת" לבין המאורע "עובר את בחינת הבגרות", וכי ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת הבגרות בשנה זו היא a $(0<a<1)$. הבע באמצעות a את ההסתברות שתלמיד עבר את בחינת המתכונת ונכשל בבחינת הבגרות בשנה זו.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) המשולש BCF חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R. BF הוא קוטר במעגל.
מן הנקודה A יוצאים שני משיקים למעגל - האחד משיק למעגל בנקודה B והאחר חותך את המשך הצלע CF בנקודה D, כמתואר בציור שלפניך.



נתון: $AD \perp CD$.

א. הוכח: $\sphericalangle BFC = \sphericalangle BAD$.

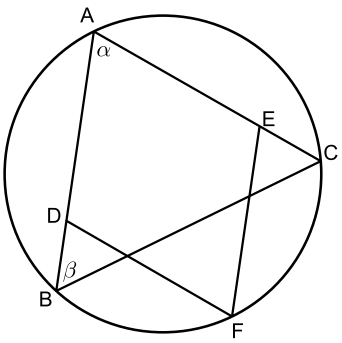
נתון: K היא נקודה על הצלע BC, כך ש-FK חוצה את $\sphericalangle BFC$.

ב. הוכח: $KC = \dfrac{CF \cdot BO}{AB}$.

ג. הוכח: $KB \cdot AB = 2R^2$.

ד. הסבר מדוע שטח ΔBFK גדול משטח ΔKFC.

5) ABC הוא משולש החסום במעגל שרדיוסו R. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות AB ו-AC בהתאמה, והנקודה F נמצאת על הקשת BC כך שהמרובע ADFE הוא מעוין (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle ABC = \beta$.



א. (1) הבע באמצעות α ו-β את $\sphericalangle ABF$.

(2) הבע באמצעות R, α ו-β את אורך האלכסון AF.

ב. הבע באמצעות R, α ו-β את אורך צלע המעוין.

נתון כי AF הוא קוטר במעגל.

ג. הראה כי שטח המעוין הוא $2R^2 \tan\dfrac{\alpha}{2}$.

נתון כי רדיוס המעגל החסום במעוין ADFE הוא $\dfrac{3}{5}R$.

ד. חשב את β.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתון: הפונקציה $g''(x)=-\frac{18}{x^4}+\frac{18}{(x-4)^4}$ היא פונקציית הנגזרת השנייה של הפונקציה $g(x)$. הפונקציות $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ מוגדרות באותו תחום.

נתון כי משוואת המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודת הפיתול שלה היא $y=\frac{3}{2}x-3$.

א. (1) מצא את הפונקציה $g(x)$.

(2) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

נגדיר: $h(x)=|g(x)|$.

ב. באותה מערכת צירים שבה סרטטת סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$, הוסף בקו מקווקו סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

ג. נתון כי: $\int_a^2 g(x)dx=t$, $0<a<2$, t הוא פרמטר.

הבע באמצעות t את $\int_a^2 (h(x)-g(x))dx$.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=2\sin x+\cos 2x-1$ בתחום $-\frac{\pi}{2}\le x\le \frac{3}{2}\pi$.

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ הוזז שמאלה ב-$\frac{\pi}{2}$ כך שהתקבלה פונקציה $g(x)$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le \pi$.

ב. (1) בטא את הפונקציה $g(x)$ באמצעות הפונקציה $f(x)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

(3) הוכח כי $g(x)$ היא פונקציה זוגית.

לפניך 3 ביטויים, III-I :

I: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x+\pi\right)dx$ II: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)dx$ III: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$

ג. ציין איזה מן הביטויים III-I שווה ל- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f\left(x\right)dx$.

נמק את תשובתך. אין צורך בחישוב.

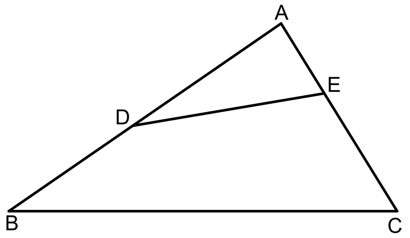
8) במשולש ABC נתון: AB = 30, AC = 20.

$\sphericalangle CAB=\alpha$, α הוא קבוע.

הנקודה D נמצאת על הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC (ראה ציור).

נתון: שטח המשולש ADE שנוצר באופן הזה הוא רבע משטח המשולש ABC.

סמן את אורך הקטע AD ב- x.



א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE.

ב. (1) הבע באמצעות α את האורך המינימלי של הקטע DE.

(2) הסק מתת-סעיף ב (1) את הערך של x שבעבורו היחס $\frac{DE}{BC}$ הוא מינימלי. הסבר.

תשובות סופיות:

1) א. (1) 24 מ"ק ליום. (2) 8 ימים. ב. במהלך היום השישי.

ג. (1) $\frac{24}{m}$ הספק יומי של פועל מנוסה, $\frac{24}{m}-1$ הספק יומי של פועל מתלמד. (2) 12 פועלים.

2) א. (1) הוכחה. (2) 43. ב. (1) 40 (2) 1720 ג. עולה. ד. $44-k$.

3) א. (1) 180 תלמידים (2) 0.4 (3) 0.36 ב. $a-a^2$.

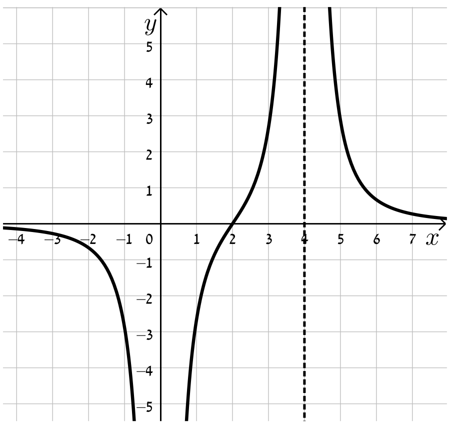
4) א - ג. הוכחות. ד. $S_{\text{BFK}} > S_{\text{KFC}}$.

5) א. (1) $\beta+\frac{\alpha}{2}$ (2) $2R\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$ ב. $\dfrac{R\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

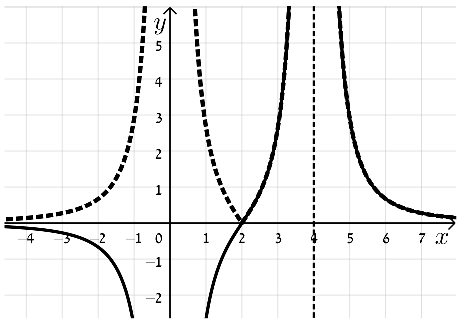
ג. הוכחה. ד. 53.13°.

6) א. (1) $g(x)=-\frac{3}{x^2}+\frac{3}{(x-4)^2}$ (2) $x\neq 0$, $x\neq 4$

(3) עולה: $0<x<4$, יורדת: $x<0$, $x>4$ (4) להלן סקיצה:



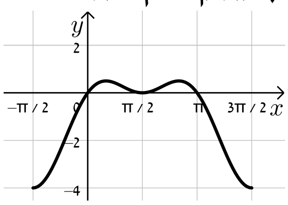
ב. להלן סקיצה: ג. $-2t$.



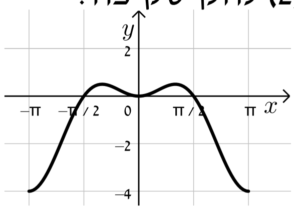
7) א. (1) $(\pi,0)$, $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $(0,0)$

(2) $\min\left(\frac{3\pi}{2},-4\right)$, $\max\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(\frac{\pi}{2},0\right)$, $\max\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$, $\min\left(-\frac{\pi}{2},-4\right)$.

(3) להלן סקיצה:



ב. (1) $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ (2) להלן סקיצה:



(3) הוכחה. ג. גרף II.

8) א. $\frac{150}{x}$ ב. (1) $\sqrt{300-300\cos\alpha}$ (2) $\sqrt{150}$.

בגרות קיץ 2019 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

(1 במאפייה יש שתי מכונות לייצור עוגות : מכונה I ומכונה II.
כל אחת מן המכונות מייצרת עוגות בקצב קבוע משלה.
ביום ראשון זמן העבודה של שתי המכונות היה שווה.
ביום ראשון מכונה I יצרה 80 עוגות יותר ממספר העוגות שייצרה מכונה II.
ביום שני ייצרה מכונה II את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה I ביום ראשון,
ומכונה I ייצרה את אותו מספר עוגות שייצרה מכונה II ביום ראשון.
ביום שני היה זמן העבודה של מכונה II ארוך פי $\frac{25}{9}$ מזמן העבודה
של מכונה I באותו יום.

א. חשב כמה עוגות סך הכול ייצרו שתי המכונות ביום ראשון.

נסמן : T_1 - הזמן הדרוש למכונה I לייצר עוגה <u>אחת</u>.
T_2 - הזמן הדרוש למכונה II לייצר עוגה <u>אחת</u>.

ב. חשב את היחס $\frac{T_1}{T_2}$. נמק.

ג. (1) בפרק זמן מסוים מכונה I ייצרה בדיוק 47 עוגות.
כמה עוגות <u>שלמות</u> ייצרה מכונה II בפרק הזמן הזה? הסבר.
(2) ידוע ששתי המכונות עבדו אותו פרק זמן, וכל אחת מהן ייצרה מספר שלם של עוגות. האם ייתכן שבפרק הזמן הזה שתי המכונות יחד ייצרו 26 עוגות? נמק.

2) a_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שהמנה שלה היא q. $|q| \neq 1$.

נתון: $a_3 \cdot a_7 = 1$.

א. חשב את a_5 (מצא את שתי האפשרויות).

נתון: $a_5 > 0$.

ב. (1) הבע את a_1 באמצעות q.

(2) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_1}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

(3) האם קיים n טבעי שעבורו $a_n = \frac{1}{a_{13}}$? אם כן – מצא אותו. אם לא – נמק.

ג. (1) הבע באמצעות q את 7 האיברים הראשונים של הסדרה a_n.

(2) נתון: $a_1 \cdot a_2 \cdot .... \cdot a_k = 1$ (k הוא מספר טבעי).

מצא את הערך של k, והסבר מדוע הוא הערך האפשרי היחיד של k.

3) גלי ונטע משחקות משחק ובו אפשר לקבוע את מספר הסיבובים.
בכל סיבוב אחת מהן זוכה והאחרת מפסידה.
המנצחת במשחק כולו תהיה זו תזכה ביותר סיבובים מחברתה.
אם לשתיהן מספר שווה של זכיות בסיבובים, התוצאה במשחק כולו תהיה תיקו.

נתון: בכל סיבוב הסיכוי של נטע לזכות הוא $\frac{1}{3}$.

א. ביום ראשון שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.
(1) מהי ההסתברות שנטע ניצחה במשחק כולו?
(2) מהי ההסתברות לתוצאת תיקו במשחק כולו?

ב. גם ביום שני שיחקו גלי ונטע 4 סיבובים במשחק.
הפעם הן החליטו מראש שאם התוצאה במשחק של 4 הסיבובים תהיה תיקו – הן ישחקו עוד 3 סיבובים כדי להכריע את תוצאת המשחק, ומי שתזכה ביותר סיבובים תנצח במשחק כולו. מהי ההסתברות שנטע תנצח במשחק כולו?

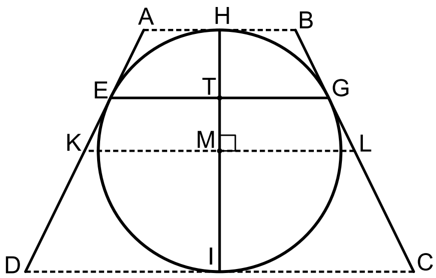
ג. ידוע שנטע ניצחה במשחק כולו בדיוק באחד משני הימים: ראשון או שני.
מה הסיכוי שהיא ניצחה במשחק כולו ביום שני?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) EG הוא מיתר במעגל שמרכזו M ורדיוסו r.
דרך הנקודות E ו-G העבירו משיקים למעגל.
דרך מרכז המעגל, M, העבירו ישר המקביל למיתר EG וחותך את המשיקים בנקודות K ו-L כמתואר בציור.
דרך מרכז המעגל, M, העבירו אנך ל-KL אשר חותך את המיתר EG בנקודה T ואת המעגל הנקודות H ו-I, כמתואר בציור.
נסמן: $TG = a$.



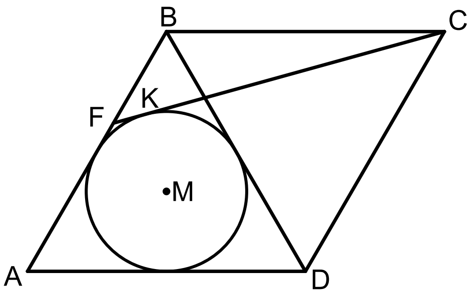
א. (1) הוכח: $TG \cdot ML = MG^2$.
(2) הבע את אורך הקטע KL באמצעות a ו-r.

דרך הנקודות H ו-I העבירו משיקים למעגל, כך שנוצר טרפז שווה שוקיים ABCD שחוסם את המעגל, כמתואר בציור.

ב. (1) הוכח: $BC = KL$.
(2) הבע את היקף הטרפז ABCD באמצעות a ו-r.

ג. האם היחס בין היקף הטרפז ABCD והיקף המעגל יכול להיות קטן מ-$\frac{4}{\pi}$? נמק.

5) ABCD הוא מעוין שאורך צלעו הוא a.
נתון: $\sphericalangle BAD = 60°$.
במשולש ABD חסום מעגל שמרכזו M.
מן הקדקוד C העבירו משיק למעגל שהמשכו חותך את הצלע AB בנקודה F והוא משיק למעגל בנקודה K (ראה ציור).



א. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.

ב. (1) הסבר מדוע הנקודה M נמצאת על אלכסון המעוין AC.
(2) חשב את גודל הזווית ACF.

ג. הבע באמצעות a את שטח המשולש ACF.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 8-6 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה משפחת הפונקציות: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-2}}{2x-a}$. a הוא פרמטר המקיים: $-4<a<2$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) הסבר מדוע לפונקציה $f(x)$ אין אסימפטוטה מקבילה לציר ה- y .

(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לציר ה-x .

(4) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?

(5) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) הבע באמצעות a את שיעורי ה-x שבעבורם $f'(x)=0$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את הערך של a שבעבורו $f'(x)\neq 0$ לכל x בתחום ההגדרה.

הצב $a=-1$ במשוואת הפונקציה $f(x)$ וענה על הסעיפים ג-ד.

ג. (1) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה)?

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. חשב את $\int_3^4 \frac{1}{f(x)}dx$. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=x^3\sin x$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$.

א. (1) קבע אם הפונקציה $f(x)$ היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x תחום הנתון.

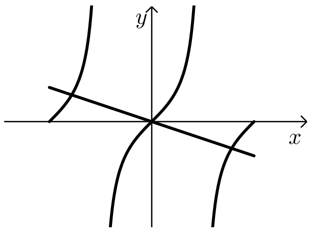
(3) הסבר מדוע הפונקציה $f(x)$ היא אי-שלילית בתחום הנתון.

(4) קבע אם פונקציית הנגזרת $f'(x)$, היא זוגית או אי-זוגית או לא זוגית ולא אי-זוגית. נמק.

ב. (1) הראה ששיעורי ה-x שעבורם $f'(x)=0$ מקיימים : $\tan x=-\frac{1}{3}x$.

(2) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות :

$h(x)=-\frac{1}{3}x$ ו- $g(x)=\tan x$ בתחום $-\pi\le x\le\pi$.



היעזר בציור וקבע כמה נקודות בתחום $-\pi\le x\le\pi$ מקיימות : $f'(x)=0$.

נתון : שיעור ה-x של אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ הוא 2.46 בקירוב.

ענה על הסעיפים ג-ד בעבור התחום $-\pi\le x\le\pi$.

ג. (1) מה הם שיעורי ה-x של כל נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק וקבע את סוגן.

(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$, בתחום.

(2) כמה נקודות פיתול לכל הפחות יש לפונקציה $f(x)$ בתחום? נמק.

8) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x)=\sqrt{-x^2+7x}$ ו- $g(x)=\sqrt{14-2x}$.

גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את ציר ה- x בראשית הצירים ובנקודה B, ואת גרף הפונקציה $g(x)$ הוא חותך בנקודות B ו-D, כמתואר בציור.

א. (1) מצא את תחומי ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x)$.

(2) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות B ו-D.

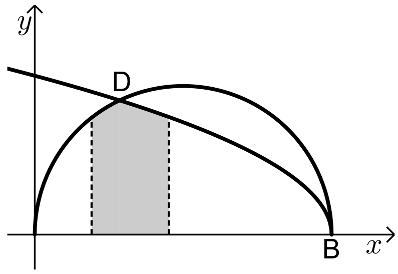
a הוא פרמטר המקיים : $1\le a\le 2$.

השטח המוגבל על ידי הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$, על ידי האנכים $x=a$ ו- $x=a+1$ ועל ידי ציר ה- x , מסתובב סביב ציר ה- x .

ב. (1) חשב את a שבעבורו נפח גרף הסיבוב המתקבל הוא המקסימלי.

(2) מצא את a שבעבורו נפח גוף הסיבוב המתקבל הוא המינימלי.

אם צריך, השאר בתשובותיך שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.



תשובות סופיות:

1) א. 320 עוגות. ב. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{3}{5}$ ג. (1) 28 עוגות שלמות.

ג. (2) לא יתכן.

2) א. $a_5=1$ או $a_5=-1$ ב. (1) $a_1=\frac{1}{q^4}$ ב. (2) $n=9$

ב. (3) אין כזה. ג. (1) $\frac{1}{q^4}\ ,\ \frac{1}{q^3}\ ,\ \frac{1}{q^2}\ ,\ \frac{1}{q}\ ,1\ ,q\ ,q^2$ ג. (2) $k=9$

3) א. (1) $\frac{1}{9}$ א. (2) $\frac{8}{27}$ ב. $\frac{137}{729}$ ג. $\frac{137}{211}$

4) א. (1) הוכחה. א. (2) $\mathrm{KL}=\frac{2r^2}{a}$ ב. (1) הוכחה.

ב. (2) $P_{\mathrm{ABCD}}=\frac{8r^2}{a}$ ג. לא.

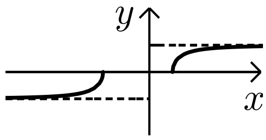
5) א. $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ ב. (1) הוכחה. ב. (2) $\sphericalangle \mathrm{ACF}=14.478^\circ$ ג. $S_{\mathrm{ACF}}=0.267a^2$

6) א. (1) $x\geq 1\ ,\ x\leq -2$ א. (2) הוכחה. א. (3) $y=-\frac{1}{2}\ ,\ y=\frac{1}{2}$

א. (4) $(1,0)\ ,\ (-2,0)$ א. (5) $f(x)<0$ עבור $x<-2$, $f(x)>0$ עבור $x>1$.

ב. (1) $x=\frac{8-a}{2a+2}$ ב. (2) $a=-1$ ג. (1) $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.

ג. (2)



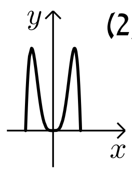
ד. 2.16 יח"ר $=6\sqrt{2}-2\sqrt{10}$

7) א. (1) $f(x)$ זוגית. א. (2) $(\pi,0)\ ,\ (0,0)\ ,\ (-\pi,0)$ א. (3) הוכחה.

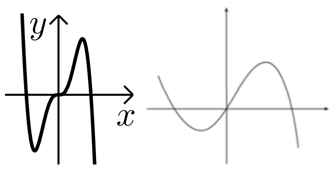
א. (4) $f'(x)$ אי זוגית. ב. (1) הוכחה. ב. (2) שלוש נקודות.

ג. (1) $x=\pi$ מינימום קצה, $x=2.46$ מקסימום, $x=0$ מינימום,
$x=-2.46$ מקסימום, $x=-\pi$ מינימום קצה.

ג. (2)



ד. (1)



ד. (2) 2 נקודות פיתול לפחות.

8) א. (1) $0\leq x\leq 7: f(x)\ ,\ x\leq 7: g(x)$ א. (2) $x_B=7, x_D=2$

ב. (1) $a=1.63$ ב. (2) $a=1$

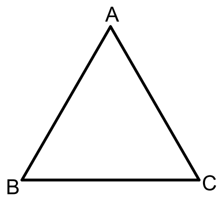
בגרות קיץ 2019 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) בציור שלפניך מתואר מסלול לרכיבה באופניים בצורת משולש שווה צלעות ABC, שאורך צלעו a מטר.



ביום מסוים יצאו שני רוכבי אופניים באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B.
הם רכבו לאותו הכיוון לאורך המסלול המשולש.
כל אחד מהם רכב במהירות קבועה. המהירות של רוכב א גדולה ב-2 מטרים לשנייה מן המהירות של רוכב ב.
כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A לאחר שהשלים פעמיים את המסלול המשולש, הגיע רוכב ב אל הנקודה B בפעם השנייה.

א. מצא את המהירות של כל אחד מרוכבי האופניים.

ב. באיזו נקודה על המשולש יהיה רוכב ב, כאשר יגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול המשולש?

כאשר הגיע רוכב א אל הנקודה A אחרי שהשלים 5 פעמים את המסלול, הוא הסתובב והחל לרכוב לכיוון הנגדי - מן הנקודה A לכיוון הנקודה C - בלי לשנות את מהירותו.
רוכב ב המשיך לרכוב בכיוון הנסיעה המקורי, בלי לשנות את מהירותו.
הרוכבים נפגשו בנקודה M.

ג. מצא על איזו צלע של המשולש נמצאת הנקודה M,
ומצא באיזה יחס הנקודה M מחלקת את הצלע שמצאת.

למחרת שוב יצאו הרוכבים מן הנקודה A, רכבו לכיוון הנקודה B והמשיכו לרכוב במסלול המשולש, כל אחד מהם רכב באותה המהירות שרכב ביום שלפני כן.
רוכב א חלף על פני רוכב ב בפעם הראשונה 6 דקות אחרי שיצאו לדרך.

ד. מצא את היקף המשולש. נמק את תשובתך.

2) נתונה סדרה a_n המקיימת לכל n את הכלל : $a_{n+1}+a_n=6n+5$.

א. הוכח כי מתקיים : $a_{n+2}=a_n+c$ (c הוא מספר קבוע), ומצא את c.

ב. כתוב דוגמה לסדרה a_n המקיימת את הכלל, והיא אינה סדרה חשבונית (כתוב לפחות 4 איברים ראשונים בסדרה).

נתון כי הסדרה a_n כולה היא חשבונית.

ג. חשב את a_1 .

בנו סדרה חדשה בת $2n+1$ איברים : $a_1-1\ ,\ a_2-2\ ,\ a_3-3\ ,\ ....\ ,\ a_{2n+1}-(2n+1)$

האיבר האמצעי בסדרה החדשה הוא 43.

ד. חשב את סכום הסדרה החדשה.

3) בקופסה יש 12 כדורים כחולים, 20 כדורים אדומים ו-8 כדורים צהובים.
על 28 מן הכדורים רשומה הספרה 1, ועל השאר רשומה הספרה 0.
$\frac{1}{4}$ מן הכדורים שרשומה עליהם הספרה 1 הם צהובים.
מספר הכדורים האדומים שרשומה עליהם הספרה 1 גדול פי 4 ממספר הכדורים הכחולים שרשומה עליהם הספרה 0.
דני מוציא באקראי כדור מן הקופסה.

א. מהי ההסתברות שהכדור שהוציא דני הוא כדור כחול ושרשומה עליו הספרה 1?

ב. אם ידוע שדני הוציא כדור כחול או כדור שרשומה עליו הספרה 1, מהי ההסתברות שהוא הוציא כדור שרשומה עליו הספרה 0?

דני החזיר את הכדור לקופסה, וכעת הוא משחק במשחק : הוא מוציא באקראי כדור מן הקופסה, רושם לעצמו את הספרה שעליו ומחזיר את הכדור לקופסה.
בכל פעם שהוא מוציא כדור שרשומה עליו הספרה 1 הוא צובר נקודה.
הוא יפסיק לשחק כאשר הוא יצבור 5 נקודות.

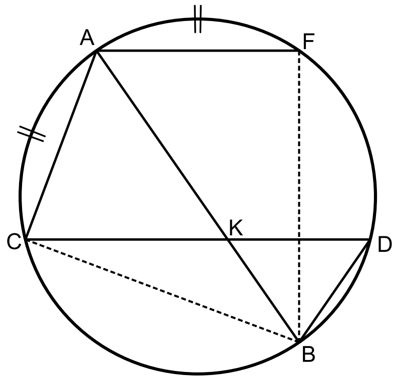
ג. מהי ההסתברות שדני יצבור 5 נקודות אחרי 6 פעמים בדיוק?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) AB הוא קוטר במעגל. CD ו-AF הם שני מיתרים במעגל המקבילים זה לזה.
AB ו-CD נחתכים בנקודה K (ראה ציור).



נתון כי $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{CA}$ (הקשתות המסומנות בציור).

א. (1) הוכח כי: $\sphericalangle FAB = \sphericalangle CAB$.

(2) הוכח כי: $BK = BD$.

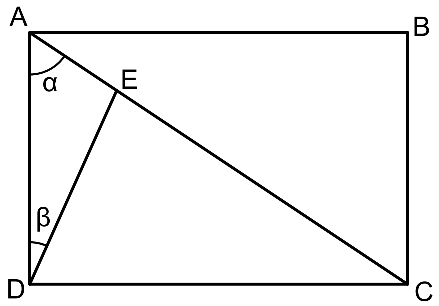
ב. הוכח כי המרובע AFKC הוא מעוין.

ג. נתון גם כי: $BD \cdot AB = CD \cdot AC$.

(1) הוכח כי $\Delta BDC \sim \Delta CAB$.

(2) הוכח כי CD הוא קוטר במעגל.

5) נתון מלבן ABCD. הנקודה E נמצאת על האלכסון AC (ראה ציור).
נתון כי: $\sphericalangle ADE = \beta$, $\sphericalangle DAC = \alpha$.



R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המלבן ABCD.

R_2 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

א. הבע את היחס $\frac{R_1}{R_2}$ באמצעות α ו- β.

ב. הראה כי כאשר $\alpha = \beta$ מתקיים: $\frac{R_1}{R_2} < 2$.

ג. נתון כי: $\alpha = 60°$, $\beta = 15°$.

(1) הראה כי ΔDEC הוא משולש שווה שוקיים.

(2) הבע את BE^2 באמצעות R_1.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f\left(x\right)=a\cos 2x+\sin^2 x$ המוגדרת בתחום $-\pi\le x\le\pi$, a פרמטר.

א. האם הפונקציה $f\left(x\right)$ היא זוגית או אי-זוגית או אף לא אחת מהן? נמק.

ב. מה הם שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$ (הבע באמצעות a אם צריך),
אם נתון כי הפונקציה אינה קבועה? קבע את סוגן בהתאם לערך של a
(התייחס לשתי האפשרויות עבור a).

ג. מצא את הערך של a שעבורו הפונקציה $f\left(x\right)$ היא קבועה. נמק.

נתון: $a>1$.

ד. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'\left(x\right)$.

ה. נתון כי השטח המוגבל על ידי גרף פונקציית הנגזרת $f'\left(x\right)$ ועל ידי ציר ה-x שווה ל-12. מצא את a.

7) נתון מעגל ובו קוטר AB. רדיוס המעגל הוא 10.
הנקודה P נמצאת על הקוטר AB בין מרכז המעגל ובין הנקודה B.
דרך הנקודה P מעבירים אנך ל-AB החותך את המעגל בנקודות C ו-D.
מצא את השטח המקסימלי של המשולש ACD.

8) נתונה הפונקציה $f\left(x\right)=\frac{x^2+bx-c}{x^2-4}$, c ו- b הם פרמטרים.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f\left(x\right)$.

נתון כי הפונקציה $f\left(x\right)$ היא זוגית.

ב. מצא את b.

נתון: לגרף הפונקציה $f\left(x\right)$ יש שתי נקודות חיתוך עם ציר ה- x בין שתי האסימפטוטות האנכיות שלה.

ג. מצא את תחום הערכים של c.

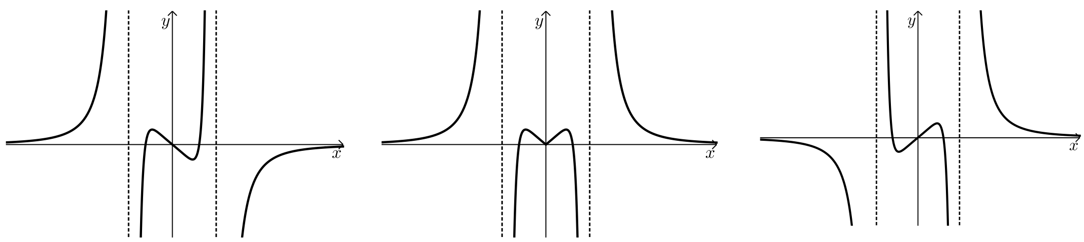
ד. (1) מצא את שיעורי נקודת הקיצון של הפונקציה $f\left(x\right)$, וקבע את סוגה (הבע באמצעות c אם צריך).

(2) מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה $f\left(x\right)$, וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f\left(x\right)$.

ה. נתונה הפונקציה: $g\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot f'\left(x\right)$ המוגדרת באותו תחום שבו מוגדרות הפונקציות $f\left(x\right)$ ו- $f'\left(x\right)$. לפניך גרפים I-III :

(1) איזה מן הגרפים, I-III, הוא גרף הפונקציה $g\left(x\right)$? נמק.

(2) הבע באמצעות c את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $g\left(x\right)$ ועל ידי ציר ה- x .



III II I

תשובות סופיות:

1) א. מהירות רוכב א': 6 מ'/שניה. מהירות רוכב ב': 4 מ'/שניה.

ב. רוכב ב' יהיה על נקודה B.

ג. $\frac{BM}{MC}=\frac{4}{1}$, M נמצאת בין B ל- C.

ד. $P_{ABC}=$ 720 מ'

2) א. $c=6$

ב. 0,11,6,17,....

ג. $a_1=4$

ד. סכום הסדרה החדשה הוא: 1,763.

3) א. $\frac{9}{40}$

ב. $\frac{3}{31}$

ג. 0.252105

4) א. (1) הוכחה.

א. (2) הוכחה.

ב. הוכחה.

ג. (1) הוכחה.

ג. (2) הוכחה.

5) א. $\frac{R_1}{R_2}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}$

ב. הוכחה.

ג. (1) הוכחה.

ג. (2) $\mathrm{BE}^2=R_1^2\left(4-\sqrt{3}\right)$.

6) א. $f(x)$ זוגית.

ב. עבור $a<\frac{1}{2}$:

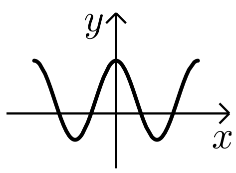
$$\min(-\pi,a)\ ,\ \max\left(-\frac{\pi}{2},1-a\right)\ ,\ \min(0,a)\ ,\ \max\left(\frac{\pi}{2},1-a\right)\ ,\ \min(\pi,a)$$

עבור $a>\frac{1}{2}$:

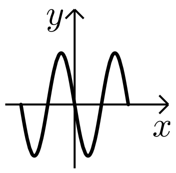
$$\max(-\pi,a)\ ,\ \min\left(-\frac{\pi}{2},1-a\right)\ ,\ \max(0,a)\ ,\ \min\left(\frac{\pi}{2},1-a\right)\ ,\ \max(\pi,a)$$

ג. $a=\frac{1}{2}$

ד. (1)



ד. (2)



ה. $a=2$

7) $S_{ACD}=75\sqrt{3}$

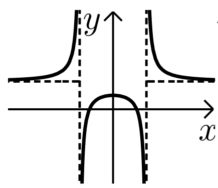
8) א. $x\neq -2, x\neq 2$

ב. $b=0$

ג. $0<c<4$

ד. (1) $\max\left(0,\frac{c}{4}\right)$

ד. (2) $y=1$. סקיצה:



ה. (1) III.

ה. (2) $S=\frac{C^2}{16}$

בגרות חורף 2020:

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) המרחק בין עיר א׳ ובין עיר ב׳ הוא 96 ק״מ.
מכונית ומשאית יצאו באותו הזמן מעיר א׳ ונסעו לכיוון עיר ב׳.
בתחילה נסעה המכונית במהירות קבועה של v_1 קמ״ש.
לאחר שעברה 15 ק״מ מן הדרך, היא עצרה בצד הדרך למשך חצי שעה, לצורך תיקון תקלה. לאחר שתוקנה התקלה, המשיכה המכונית בדרכה במהירות קבועה של 90 קמ״ש. המשאית נסעה כל הדרך במהירות קבועה של v_2 קמ״ש.
היא חלפה על פני המכונית 3 דקות לאחר שהמכונית עצרה בצד הדרך.
המכונית והמשאית הגיעו לעיר ב׳ באותו הזמן.

א. מצא את v_1 ואת v_2.

ב. כמה זמן אחרי שהמכונית והמשאית יצאו לדרך היה המרחק ביניהן 3 ק״מ?
(מצא שניים משלושת המקרים).

2) a_n היא סדרה חשבונית.
k ו- p הם מספרים טבעיים. $k < p$.
נתון: $a_k = p$, $a_p = k$.

א. (1) הוכח שהפרש הסדרה a_n הוא 1-.

(2) הבע את a_1 באמצעות k ו- p.

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n = a_n - n$.
נתון כי סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה c_n הוא 0.

ב. (1) מצא את a_1.

(2) מה הם ערכי k ו- p? מצא את כל האפשרויות.

ג. חשב את הסכום: $(c_1 - c_2)^2 + (c_3 - c_4)^2 + ... + (c_{99} - c_{100})^2$. נמק.

3) בקופסה יש 12 כדורים. רובם כחולים והשאר אדומים.
הוציאו באקראי כדור מן הקופסה, החזירו אותו לקופסה, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו. ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו היו בצבעים שונים היא $\frac{4}{9}$.

א. מצא כמה כדורים כחולים יש בקופסה.

ב. הוסיפו לקופסה כדורים צהובים.
לאחר ההוספה הוציאו באקראי כדור, החזירו אותו, ושוב הוציאו באקראי כדור והחזירו אותו. ההסתברות שהוציאו שני כדורים בצבעים שונים נשארה $\frac{4}{9}$.
כמה כדורים צהובים הוסיפו לקופסה?

העבירו את כל הכדורים הצהובים לכלי אחר והשאירו בקופסה רק את הכדורים הכחולים והאדומים.

ג. הוציאו באקראי מן הקופסה כדור אחרי כדור שוב ושוב (ללא החזרה), עד שהוציאו כדור אדום. מהי ההסתברות שמספר ההוצאות היה גדול מ-3?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) AD ו-CE הם חוצי זווית במשולש ABC, ונקודת החיתוך שלהם היא F.
נתון: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$.

א. הוכח כי אפשר לחסום את המרובע BDFE במעגל.

נתון: FB הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע BDFE.

ב. הוכח שהמשולש ABC הוא משולש שווה צלעות.

המשך הקטע BF חותך את הצלע AC בנקודה G.

ג. הוכח כי הקטע FG שווה באורכו לרדיוס המעגל החוסם את המרובע BDFE.

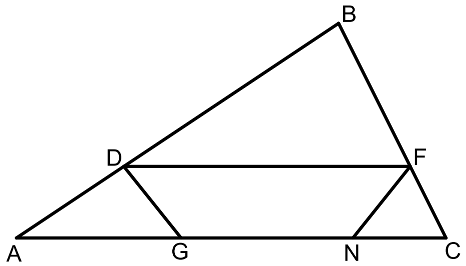
בנקודה F מעבירים משיק למעגל החוסם את המרובע BDFE.
המשיק חותך את הצלעות BA ו-BC בנקודות K ו-L בהתאמה.

ד. מצא את היחס $\frac{KL}{AC}$. נמק את תשובתך.

5) במשולש ABC הנקודות D ו-F נמצאות על הצלעות BA ו-BC בהתאמה כך ש- $DF \parallel AC$. הנקודות G ו-N נמצאות על הצלע AC כך שהמרובע DFNG הוא טרפז שווה שוקיים, כמתואר בציור.

נסמן: $\sphericalangle BAC = \alpha$, $\sphericalangle FNC = \beta$.

נתון: $AD = 7$, $FC = 4$, $\sphericalangle FCN = 2\alpha$.



א. (1) הראה כי: $\frac{AD}{\sin\beta} = \frac{FN}{\sin\alpha}$.

(2) חשב את α.

נתון: שטח המשולש BDF הוא 56.

ב. מצא את אורך הקטע DF.

ג. מהו היחס בין רדיוס המעגל החוסם את המשולש FCN ובין רדיוס המעגל החוסם את המשולש DAG? נמק.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6}{2\cos^2 x - 5\cos x - 3}$ בתחום $0 \le x \le 2\pi$.

ענה על הסעיפים א-ג בעבור התחום הנתון.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $h(x) = |f(x) + 2|$, שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.

(2) k הוא פרמטר. מצא את כל הערכים של k שבעבורם הישר $y = k$ חותך את גרף הפונקציה $h(x)$ בארבע נקודות שונות.

נתונה הפונקציה: $g(x) = |f(x)| + 2$, שתחום ההגדרה של זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. האם לכל x בתחום ההגדרה $h(x) < g(x)$? נמק.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{3x}{4x^2-1}$ שתחום הגדרתה הוא $x\neq\pm\frac{1}{2}$.

א. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).

(2) מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x)=\sqrt{\frac{3x}{4x^2-1}}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) מה הן משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $g(x)$ המאונכות לצירים?

נתון כי לפונקציה $g(x)$ יש בדיוק נקודת פיתול אחת. שיעור ה-x של נקודה זו קטן מאפס.

ג. (1) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

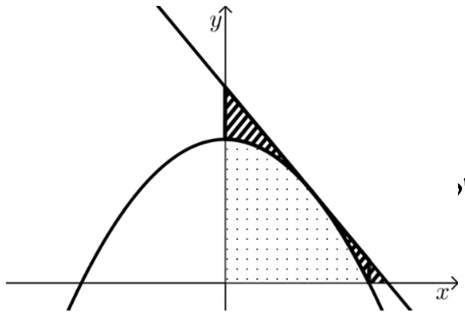
(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת, $g'(x)$.

ד. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)=\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{4x^2-1}}$?

8) נתונה הפונקציה: $f(x)=-x^2+1$.

t הוא פרמטר. נתון: $0<t<1$.

בנקודה שבה $x=t$ העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ (ראה ציור).



א. הראה כי משוואת המשיק היא $y=-2tx+t^2+1$.

נסמן ב- S את השטח המקווקו בציור (השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי הצירים).

ב. מצא בעבור איזה ערך של t השטח S הוא מינימלי. תוכל להשאיר שורש בתשובתך.

נסמן ב- A את השטח המנוקד (השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי הצירים).

ג. קבע בעבור כל אחת משתי הטענות שלפניך (1-2) אם היא נכונה או לא נכונה. נמק את תשובתך.

(1) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מקסימלי.

(2) קיים ערך של t שבעבורו $\frac{A}{S}$ הוא מינימלי.

תשובות סופיות:

1) א. $v_1 =$ 75 קמ"ש , $v_2 =$ 60 קמ"ש   ב. 12 דקות או 18 דקות או 90 דקות.

2) א. (1) הוכחה.   א. (2) $a_1 = p+k-1$ ב. (1) $a_1 = 6$

ב. (2) $p=4, k=3$ או $p=6, k=1$ ג. 200.

3) א. 8   ב. 30   ג. $\frac{14}{55}$.

4) א. הוכחה.   ב. הוכחה.   ג. הוכחה.   ד. $\frac{2}{3}$.

5) א. (1) הוכחה.   א. (2) $\alpha = 28.955°$ ב. $DF = 16.51$ ג. $\frac{4}{7}$.

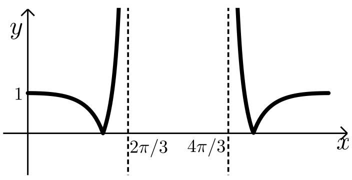
6) א. (1) $\frac{4\pi}{3} < x \le 2\pi$, $\frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3}$, $0 \le x < \frac{2\pi}{3}$

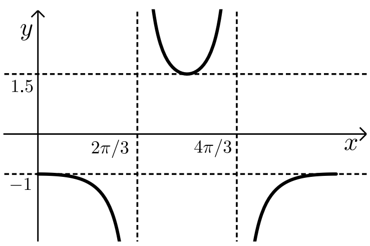
א. (2) $\max(2\pi,-1)$, $\min(\pi,1.5)$, $\max(0,-1)$ א. (3) להלן סקיצה:

ב. (1) להלן סקיצה:

ב. (2) $k > 3.5$ או $0 < k \le 1$.

ג. לא.



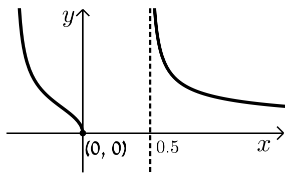


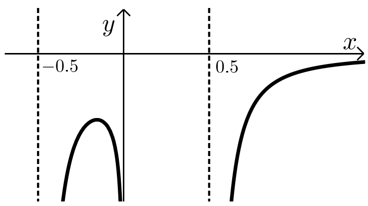
7) א. (1) עלייה: אין, ירידה: $x > \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $x < -\frac{1}{2}$.

א. (2) חיוביות: $x > \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < 0$, שליליות: $0 < x < \frac{1}{2}$, $x < -\frac{1}{2}$.

ב. (1) $x > \frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x \le 0$ ב. (2) $x = \frac{1}{2}$, $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$.

ג. (1) להלן סקיצה: ג. (2) להלן סקיצה:





ד. $x > \frac{1}{2}$.

8) א. הוכחה.

ב. $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

ג. (1) נכון.   (2) לא נכון.

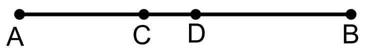
בגרות קיץ 2020 מועד א':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) רויטל מתאמנת ברכיבה על אופניים, וזיוה מתאמנת בהליכה ובריצה.
שתיהן יצאו באותו הזמן מן הנקודה A לכיוון הנקודה B.
רויטל רכבה במהירות קבועה, וזיוה הלכה במהירות קבועה.
רויטל הגיעה לנקודה B כאשר זיוה הגיעה לנקודה C,
הנמצאת בין הנקודה A לנקודה B כך ש- $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{8}$.



א. מהו היחס בין מהירות ההליכה של זיוה למהירות הרכיבה של רויטל? נמק.
מייד לאחר מכן המשיכה זיוה ללכת מהנקודה C לכיוון הנקודה B במהירות ההתחלתית שלה, ואילו רויטל חזרה ברכיבה מהנקודה B לכיוון הנקודה A במהירות שגבוהה ב-3 קמ"ש ממהירותה ההתחלתית. רויטל וזיוה נפגשו בנקודה D, הנמצאת בין הנקודה C לנקודה B (ראה איור). נתון: $\frac{CD}{DB}=\frac{6}{19}$.

ב. חשב את המהירות ההתחלתית של רויטל, ואת המהירות ההתחלתית של זיוה.
מייד אחרי שרויטל וזיוה נפגשו בנקודה D, הן יצאו לכיוון הנקודה A:
רויטל המשיכה לרכוב באותה המהירות שבה רכבה לכיוון הנקודה A,
ואילו זיוה הגבירה את מהירותה ב- k קמ"ש (k הוא מספר חיובי).
רויטל הגיעה אל הנקודה A לפני שזיוה הספיקה לעבור את מחצית הדרך מ-D ל-A.

ג. מהו תחום הערכים האפשריים בעבור k? נמק.

2) a_n היא סדרה הנדסית בעלת n איברים שהמנה שלה היא q.
כל האיברים בסדרה a_n הם מספרים טבעיים.
נתון: סכום $n-4$ האיברים הראשונים של הסדרה קטן פי 16 מסכום איברי הסדרה החל באיבר החמישי (כולל).

א. (1) הבע את סכום איברי הסדרה a_n החל באיבר החמישי (כולל) באמצעות a_5, q ו- n.
(2) מצא את מנת הסדרה.

נגדיר סדרה חדשה, b_k, בת $n-2$ איברים, שבה מתקיים: $b_k=a_k+a_{k+1}+a_{k+2}$ לכל $k\le n-2$.

ב. (1) הוכח שהסדרה b_k היא סדרה הנדסית.
(2) הוכח כי כל אחד מאיברי הסדרה b_k מתחלק ב-7 ללא שארית.

ג. c_n היא סדרה הנדסית אין-סופית שבה $c_1 = \frac{1}{b_1}$ ו- $c_2 = \frac{1}{b_2}$.

סכום הסדרה c_n שווה ל- $\frac{1}{91}$. חשב את a_1.

3) בכד יש 11 כדורים, הממוספרים בסדר עולה מ-1 עד 11.
מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור.
אם המספר שעל הכדור הוא אי-זוגי, מחזירים אותו לכד, ואם הוא זוגי, לא מחזירים אותו. לאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

א. מהי ההסתברות שנרשמו שני מספרים שמכפלתם זוגית?

ב. ידוע שהמכפלה של שני המספרים שנרשמו היא זוגית.
מצא את ההסתברות שהמספר שעל הכדור הראשון שהוציאו הוא אי-זוגי.

בכד אחר יש מספר זוגי של כדורים הממוספרים בסדר עולה (1, 2, 3 ...).
מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעל הכדור, מחזירים אותו לכד, ולאחר מכן שוב מוציאים באקראי כדור מן הכד ורושמים את המספר שעליו.

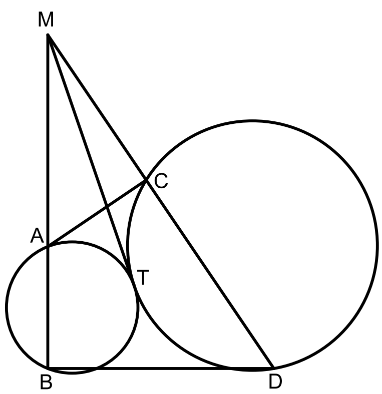
ג. (1) מצא את ההסתברות שמכפלת שני המספרים שנרשמו היא זוגית.
(2) מוציאים מן הכד k כדורים. בכל פעם שמוציאים כדור, רושמים את המספר שעליו ומחזירים אותו לכד.
הבע באמצעות k את ההסתברות שמכפלת כל המספרים שנרשמו היא זוגית.

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4) נתונים שני מעגלים, המשיקים זה לזה מבחוץ בנקודה T.
דרך הנקודה T העבירו משיק המשותף לשני המעגלים.
מן הנקודה M שעל המשיק העבירו שני ישרים החותכים את המעגלים בנקודות A, B, C ו-D, כמתואר בציור.



א. (1) הוכח: $MA \cdot MB = MC \cdot MD$.
(2) הוכח כי המרובע ABDC הוא בר חסימה במעגל.

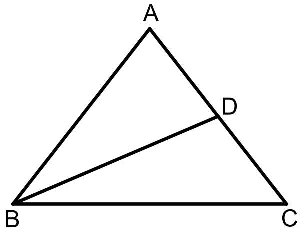
נתון: שטח המשולש MAC שווה לשטח המרובע ABDC.

ב. מצא את היחס $\frac{BD}{AC}$.

נתון: אלכסוני המרובע ABDC מאונכים זה לזה,
AD הוא קוטר במעגל החוסם את המרובע ABDC.

ג. הוכח כי המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים.

5) ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC = a$ (ראה ציור).
BD הוא תיכון במשולש ABC. נתון: $BD = a$.
הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC.



א. הבע את BC באמצעות a.
ב. חשב את זוויות המשולש BMC.
ג. נתון: $AM = 6$.
חשב את שטח המשולש ABC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = \dfrac{\sqrt{(x+1)(x-a)}}{x-2}$. $a > 2$ הוא פרמטר.
ענה על סעיף א. הבא באמצעות a אם צריך.
א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?
(2) מה הם שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים?
(3) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.
נתון: $f(a+2) = -f(2-a)$.
ב. מצא את a.
הצב $a = 5$ וענה על הסעיפים ג-ד.
ג. (1) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$ (אם יש כאלה).
(2) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x+2)$.

7) לפניך חלק מן הגרף של הפונקציה המחזורית $f(x)$.

גרף הפונקציה $f(x)$ עובר בראשית הצירים, וחותך את ציר ה-x גם בנקודות שבהן $x=x_0$ ו-$x=x_1$ כמתואר בציור.

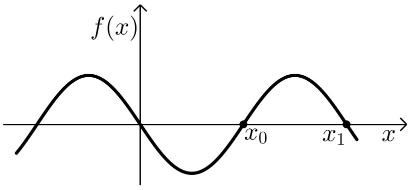
אחת המשוואות שלפניך (I-IV) מתארת את הפונקציה $f(x)$. $a\neq 0$ הוא פרמטר.

I. $y=a^2\sin x$.

II. $y=a\sin 2x$.

III. $y=a^2\cos x$.

IV. $y=a\cos 2x$.



א. (1) קבע איזו מן המשוואות I-IV היא משוואת הפונקציה $f(x)$. נמק.

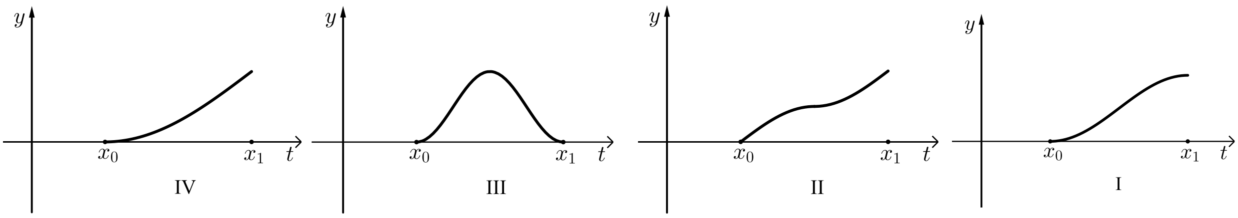
(2) קבע מהו תחום הערכים אפשריים עבור הפרמטר a. נמק.

(3) מה הם הערכים של x_0 ו-x_1 ?

ב. הבע באמצעות a את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $x_0\le x\le x_1$.

נסמן: $S(t)=\int_{x_0}^{t} f(x)dx$. נתון: $x_0\le t\le x_1$.

ג. לפניך ארבעה גרפים (I-IV). איזה מן הגרפים I-IV מתאר את הפונקציה $S(t)$? נמק.



8) נתונה הפונקציה: $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3-21x^2-22x+40}{x+2}$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$?

(2) האם לפונקציה $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית? נמק.

נתונה הפונקציה: $g(x)=x^3-21x+20$.

ב. (1) עבור אילו ערכים של x $f(x)=g(x)$? נמק.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה-x הן: $(4,0)$, $(1,0)$ ו-$(-5,0)$.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ד. $t>0$ הוא פרמטר. עבור איזה ערך של t הביטוי $\int_0^t f(x)dx$ מקבל ערך מינימלי?

תשובות סופיות:

1) א. $\frac{3}{8}$ ב. זיווה: 6 קמ"ש, רויטל: 16 קמ"ש. ג. $0<k<3.5$.

2) א. (1) $S^*_{n-4}=\frac{a_5\left(q^{n-4}-1\right)}{q-1}$ א. (2) $q=2$ ב. הוכחות. ג. $a_1=26$.

3) א. $\frac{85}{121}$ ב. $\frac{6}{17}$ ג. (1) $\frac{3}{4}$ ג. (2) $1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$.

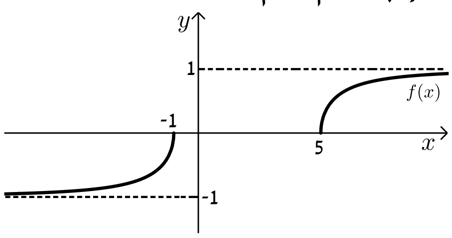
4) א. הוכחות. ב. $\sqrt{2}$ ג. הוכחה.

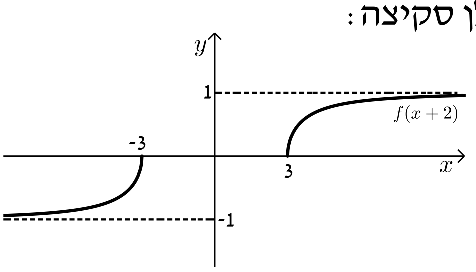
5) א. $BC=a\sqrt{1.5}=1.224a$ ב. $23.28°\ ,\ 23.28°\ ,\ 133.44°$ ג. $S_{ABC}=\frac{81\sqrt{15}}{5}=62.74$.

6) א. (1) $x\le -1\ ,\ x\ge a$ א. (2) $(a,0)\ ,\ (-1,0)$ א. (3) $y=1\ ,\ y=-1$

ב. $a=5$ ג. (1) עולה: $x>5\ ,\ x<-1$, אין תחומי ירידה.

ג. (2) להלן סקיצה: ד. להלן סקיצה:



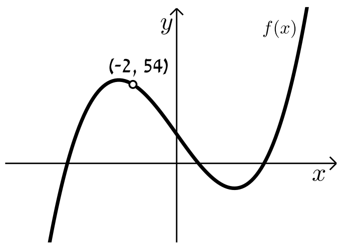


7) א. (1) II. א. (2) $a<0$ א. (3) $x_0=\frac{\pi}{2}\ ,\ x_1=\pi$ ב. $-a$ ג. גרף I.

8) א. (1) $x\ne -2$ א. (2) לא. ב. (1) $x\ne -2$

ב. (2) $\max\left(-\sqrt{7},57.04\right)\ ,\ \min\left(\sqrt{7},-17.04\right)$

ג. להלן סקיצה: ד. $t=4$.



בגרות קיץ 2020 מועד ב':

פרק ראשון – אלגברה והסתברות (40 נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1-3 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1) טל ואלון הם ספורטאים המשתתפים בתחרות טריאתלון.
התחרות מורכבת משלושה מקצים רצופים: המקצה הראשון הוא שחייה, המקצה השני הוא רכיבה על אופניים ואורכו 180 קילומטרים, והמקצה השלישי הוא ריצה ואורכו 42 קילומטרים. בפתרון השאלה, הנח שמהירות השחייה, מהירות הרכיבה ומהירות הריצה של כל אחד מן הספורטאים, טל ואלון, הן קבועות לאורך כל אחד מן המקצים.

נתון:
טל התחיל את מקצה הריצה בשעה 13:30 ואלון התחיל את מקצה הריצה בשעה 15:00.
טל הגיע לקו הסיום של הטריאתלון חצי שעה לפני אלון.
מהירות הריצה של אלון גדולה ב-1 קמ"ש ממהירות הריצה של טל.

א. באיזו שעה סיים אלון את מקצה הריצה?

באותו היום התחיל אלון את מקצה השחייה בשעה 6:00 וסיים אותו לפני השעה 10:00.

ב. לפניך שני היגדים I-II. קבע בנוגע לכל אחד מהם אם הוא אפשרי או אינו אפשרי.

I. מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 18 קמ"ש.

II. מהירות הרכיבה על אופניים של אלון היא 25 קמ"ש.

2) בסדרה a_n נתון כי לכל n טבעי, סכום n האיברים הראשונים של הסדרה $S_n = 2\cdot 3^n - 2$.

א. (1) מצא את a_1 ואת האיבר הכללי של הסדרה a_n בעבור $n>1$.

(2) הראה כי a_n היא סדרה הנדסית, ומצא את המנה שלה.

נתונה הסדרה: $c_n = S_{n+1} - S_n$.

ב. (1) הראה כי הסדרה c_n היא סדרה הנדסית.

(2) הראה כי לכל k טבעי הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה c_n גדול פי 3 מן הסכום של k האיברים הראשונים בסדרה a_n.

3) יעדי טיסות של חברת תעופה מסוימת הם היבשות : אירופה, אמריקה ואסיה בלבד (אין טיסות ללא נוסעים). נתון כי מבין הנוסעים בחברה, מספר הנוסעים לאמריקה הוא $\frac{3}{5}$ ממספר הנוסעים לאירופה. בוחרים באקראי נוסע מבין הנוסעים בחברה.
נסמן ב- p את ההסתברות שנוסע זה טס לאירופה. בוחרים באקראי 2 נוסעים מבין הנוסעים בחברה. נתון כי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו אינם טסים לאותה היבשת היא 0.62. נתון : $p > 0.4$.

א. מצא את p .

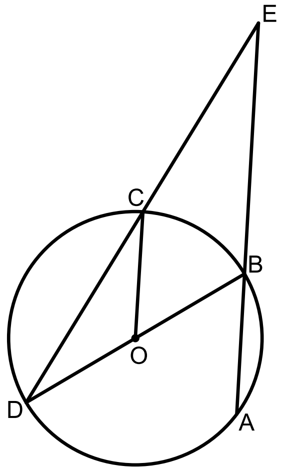
ב. בוחרים באקראי 5 נוסעים מבין הנוסעים בחברה.
מהי ההסתברות שלפחות 2 מן הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה וגם לפחות 2 מהם אינם טסים לאמריקה?

ג. באוטובוס לנמל התעופה היו 50 נוסעים שטסים בחברה זו.
התפלגות יעדי הטיסה של הנוסעים באוטובוס זהה להתפלגות יעדי הטיסה של כל הנוסעים בחברת התעופה. בחרו באקראי 2 נוסעים מן האוטובוס זה אחר זה (ללא החזרה), והתברר ששניהם טסים לאותה היבשת. מהי ההסתברות ש-2 הנוסעים שנבחרו טסים לאמריקה?

פרק שני – גאומטריה וטריגונומטריה במישור (20 נקודות)

ענה על <u>אחת</u> מהשאלות 4-5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.



4) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O.
הרדיוס OC מקביל למיתר AB, כמתואר בציור.
BD הוא קוטר במעגל.
הנקודה E היא מפגש הישרים AB ו-DC (ראה ציור).

א. הוכח : $\sphericalangle AED = \sphericalangle CDO$.

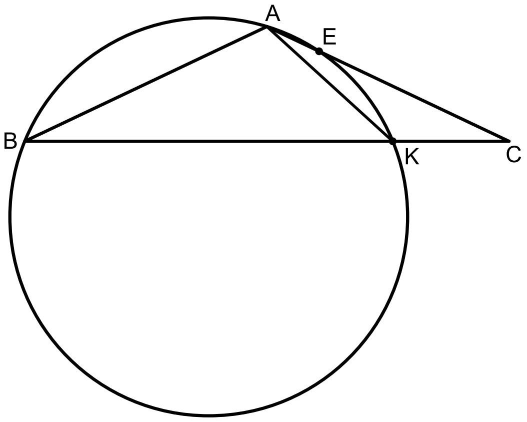
ב. הוכח כי CO חוצה את הזווית DCA.

נתון : $\frac{EB}{BA} = 2$.

ג. הוכח כי המשולש ABO הוא שווה צלעות.

ד. נתון : שטח הטרפז COBE הוא 9.
מצא את סכום שטחים המשולשים COD ו-ABO $(S_{\Delta COD} + S_{\Delta ABO})$.

5) ABC הוא משולש שווה שוקיים (AB = AC) ששניים מקודקודיו, A ו-B, נמצאים על מעגל שרדיוסו r, כמתואר בציור.
המעגל חותך את הצלעות AC ו-BC בנקודות E ו-K בהתאמה.
נסמן: $\sphericalangle BAK = \alpha$, $\sphericalangle KAC = \beta$.



א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AKC שווה ל- r .

(2) הוכח: $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{BK}{KC}$.

ידוע: $\sphericalangle ABK > \beta$, נתון: $\alpha + \beta = 120°$.

ב. הראה כי α היא זווית קהה.

נתון: AK = 28, BK = 55.

ג. חשב את α ואת אורך הקטע BC.

פרק שלישי – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות שורש (40 נקודות)

ענה על <u>שתיים</u> מהשאלות 6-8 (לכל שאלה 20 נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, תיבדקנה רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

6) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x+3)^4(2-x)$ המוגדרת לכל x .

א. (1) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(2) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(3) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x-3)}$.

ב. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

(2) האם הפונקציה $g(x)$ חותכת את הצירים, ואם כן, באילו נקודות? נמק את תשובתך.

(3) מה הם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$?

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ג. (1) הראה כי: $f(x) \ge 48$ לכל $-1 \le x \le 1$.

(2) הסבר מדוע $\int_2^4 g(x) \le \frac{1}{24}$.

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-a}}{x^2}$.$a\neq 0$ הוא פרמטר.

ענה על סעיף א. אם צריך, הבע את תשובותיך באמצעות a, והבחן בין $a>0$ ובין $a<0$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(3) הראה שהפונקציה $f(x)$ היא פונקציה זוגית.

(4) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(5) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a>0$
וסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בעבור $a<0$.
בעבור כל גרף שסרטטת כתוב את התחום המתאים של הפרמטר a .

ג. מצא בעבור אילו ערכים של הפרמטר a גרף הפונקציה $f(x)$ חותך את הישר $y=1$ או משיק לו.

8) המשולש ABC חסום במעגל.
נתון: $AB = 1$, $AC = 2$.
נסמן: $\sphericalangle BAC = x$.

א. (1) הראה כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC שווה ל- $\frac{\sqrt{5-4\cos x}}{2\sin x}$.

(2) מצא את הערך של x שבעבורו רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא מינימלי.

ב. מצא את קוטר המעגל בעבור ערך ה- x שמצאת בסעיף א (2).

תשובות סופיות:

1) א. $21:00$ ב. I. אינו אפשרי.   ב. II. אפשרי.

2) א. (1) $a_1 = 4$, $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ א. (2) $q = 3$ ב. (1) $\frac{c_{n+1}}{c_n} = 3$ ב. (2) הוכחה.

3) א. $p = 0.5$ ב. 0.441.   ג. $\frac{7}{30}$.

4) א. הוכחה.   ב. הוכחה.   ג. הוכחה.   ד. 6.

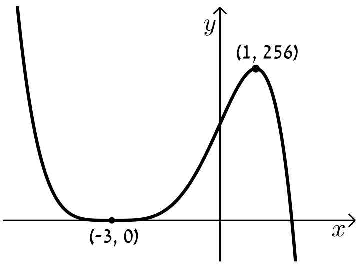
5) א. הוכחות.   ב. הוכחה.   ג. $BC = 73.376$, $\alpha = 100.844°$.

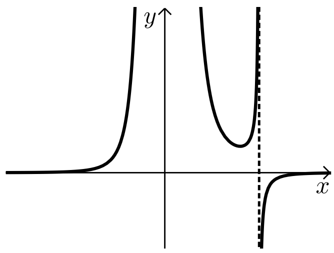
6) א. (1) $(-3,0)$, $(2,0)$, $(0,162)$ א. (2) $\max(1,256)$, $\min(-3,0)$

א. (3) סקיצה בצד.   ב. (1) $x \neq 5$, $x \neq 0$ ב. (2) לא חותכת.

ב. (3) עולה: $x > 5$, $4 < x < 5$, $x < 0$, יורדת: $0 < x < 4$

ב. (4) להלן סקיצה: ג. הוכחות.





7) א. (1) עבור: $a > 0$: $x \geq \sqrt{a}$, $x \leq -\sqrt{a}$, ועבור: $a < 0$: $x \neq 0$.

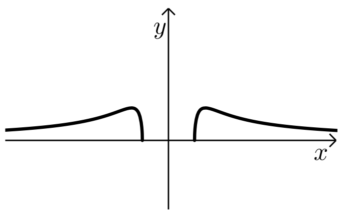
א. (2) עבור: $a > 0$: $(\sqrt{a},0)$, $(-\sqrt{a},0)$, ועבור: $a < 0$: אין.

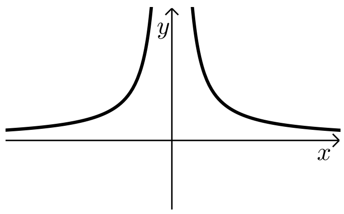
א. (3) הוכחה.   א. (4) עבור $a > 0$: $y = 0$, ועבור $a < 0$: $y = 0$, $x = 0$.

א. (5) עבור: $a > 0$: עולה: $\sqrt{a} < x < \sqrt{2a}$, $x < -\sqrt{2a}$, יורדת: $x > \sqrt{2a}$, $-\sqrt{2a} < x < -\sqrt{a}$

עבור: $a < 0$: עולה: $x < 0$, יורדת: $x > 0$.

ב. סקיצה עבור: $a > 0$:   סקיצה עבור: $a < 0$:   ג. $0 < a \leq \frac{1}{4}$, $a < 0$.





8) א. (1) הוכחה.   א. (2) $x = 60°$ ב. 2.