

## תוכן העניינים:

2	פרק 18
2	חשבון אינטגרלי
2	פונקציות מעריכיות :
2	שאלות יסודיות – אינטגרל כללי :
3	שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים :
3	חישובי שטחים :
6	חישובי נפחים :
6	תרגול נוסף :
12	תשובות סופיות :
15	פונקציות לוגריתמיות :
15	שאלות יסודיות – אינטגרל כללי :
15	שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים :
16	חישובי שטחים :
19	חישובי נפחים :
20	תרגול נוסף :
25	תשובות סופיות :
27	פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי :
27	שאלות יסודיות – אינטגרל של פונקצית חזקה :
28	שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים :
28	חישובי שטחים :
30	תרגול נוסף :
33	תשובות סופיות :

# פרק 18

## חשבון אינטגרלי

### פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים מיידים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

### שאלות יסודיות – אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx$   
 ב.  $\int (3^x + 5^{2x}) dx$   
 ג.  $\int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx$   
 ד.  $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} dx$   
 ב.  $\int \frac{3e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x - 2}{e^x - 1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$   
 ב.  $\int (e^{x+1})^2 dx$   
 ג.  $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$   
 ד.  $\int \left( 4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$

4) חשב את האינטגרלים הבאים :

א.  $\int \left( \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} \right) dx$       ב.  $\int \left( \frac{3-e^x}{(e^x-3x)^2} \right) dx$       ג.  $\int (xe^{x^2}) dx$

**שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים :**

5) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left( \ln 2, 3\frac{1}{4} \right)$ .

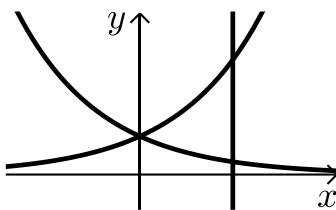
6) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא  $\frac{1}{2}$ .

7) נתונה נגזרת של פונקציה :  $f'(x) = 6x^2e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$ .

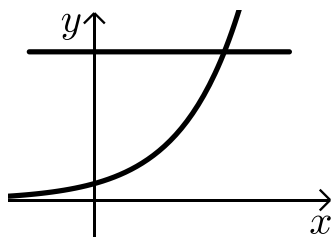
מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה  $\left( -1, \frac{2}{e} \right)$ .

**חישובי שטחים :**



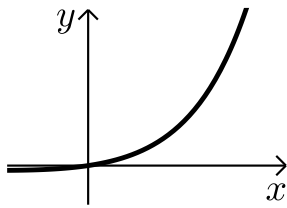
8) נתונות הפונקציות :  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .

מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר  $x = \ln 3$ .

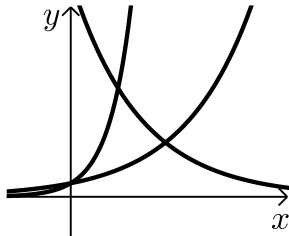


9) נתונה הפונקציה :  $f(x) = 3^x$ .

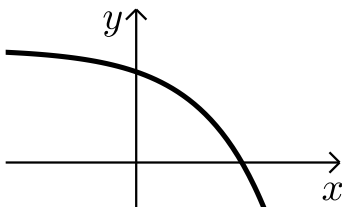
מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר  $y = 9$  וציר ה- $y$ .



- 10** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x} - e^x$ .  
 לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים.  
 מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,  
 המשיק והישר  $x = 2$ .



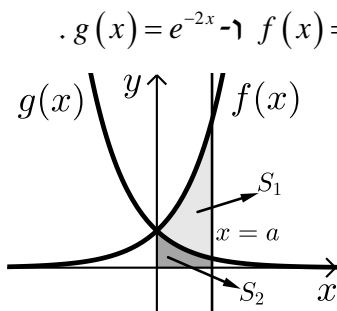
- 11** נתונות הפונקציות:  
 $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{3x}$ ,  $h(x) = 16e^{-x}$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.



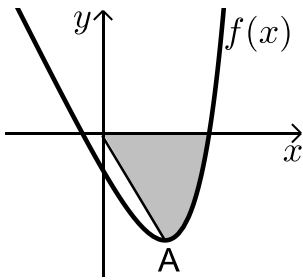
- 12** נתונה הפונקציה:  $f(x) = 5 - e^x$ .  
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו  $-e$ .  
 חשב את גודל השטח הכלוא בין  
 הפונקציה, המשיק וציר ה- $x$ .  
 ניתן להשאיר  $e$  ו- $\ln$  בתשובה.

- 13** נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{bx}$ ,  $(0 < b)$ .  
 גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר  
 בראשית הצירים וציר ה- $y$  הוא  $\frac{e-2}{4}$ . מצא את ערכו של הפרמטר  $b$ .

- 14** נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .  
 מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה  $g(x)$  ברביע הראשון הורידו אנך לשני  
 הצירים. המשך האנך לציר ה- $y$  חותך את הפונקציה  $f(x)$  ומנקודת החיתוך  
 יורד אנך נוסף לציר ה- $x$  כך שנוצר מלבן.  
 הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא  $\frac{3}{e}$ .



- 15** באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = e^{2x}$  ו- $g(x) = e^{-2x}$ .  
 מעבירים אנך לציר ה- $x$  את הישר  $x = a$ ,  $a > 0$ ,  
 כמתואר באיור.  
 אנך זה יוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$ .  
 ידוע כי השטח  $S_1$  גדול פי 3 מהשטח  $S_2$ .  
 מצא את  $a$ .



16 נתונה הפונקציה :  $f(x) = e^{2x-1} - 2ex - 2$ .

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם ראשית הצירים.

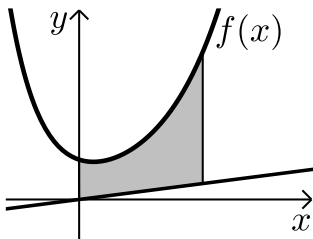
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-x, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה שבה  $x = 1.7$ .

הנקודה A עם הראשית.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

הישר וציר ה-x, אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה

שבה  $x = 1.7$ .



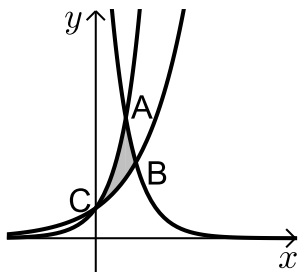
17 נתונה הפונקציה :  $f(x) = \frac{e^x + e^{ax}}{4}$ .

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה :  $(1, \frac{e^3 + 1}{4e^2})$ .

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה f(x) והישר :  $y = 0.1x$ .

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר, ציר y והאנך :  $x = 2$ .



18 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות :

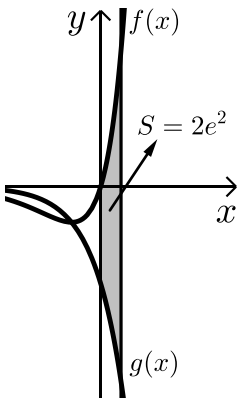
I.  $f(x) = 2^x$ . II.  $g(x) = 4^x$ . III.  $h(x) = 2^{4-2x}$ .

א. קבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-C (נקודות החיתוך שבין הגרפים).

ג. חשב את השטח המסומן באיור.

חשב את השטח המסומן באיור.



19 ענה על הסעיפים הבאים :

א. גזור את הפונקציה הבאה :  $y = e^x(x-1)$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות :  $f(x) = xe^x$ ,  $g(x) = -e^x$ .

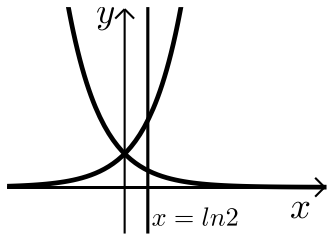
מעבירים ישר  $x = a$  ( $a > 0$ ), החותך את הגרפים

של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר

הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-y והישר.

ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$ . מצא את a.

חישובי נפחים:

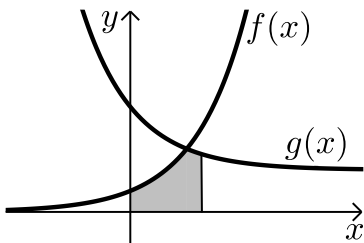


- (20) נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^x$ ,  $g(x) = e^{-x}$ .  
 השטח הכלוא בין הפונקציות והישר:  $x = \ln 2$   
 מסתובב סביב ציר ה- $x$ .  
 חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

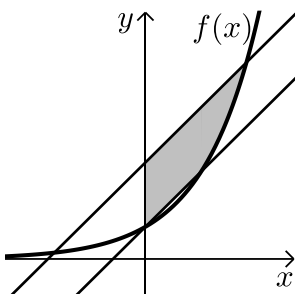
תרגול נוסף:

- (21) נתונה הפונקציה הבאה:  $f(x) = e^{2x-1}$ .  
 חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר  $x = 2$  והצירים.

- (22) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = e^x$  ו- $g(x) = ke^{-x} + 2$ .  
 ידוע כי הגרפים חותכים זה את זה בנקודה שבה  $x = \ln 3$ .



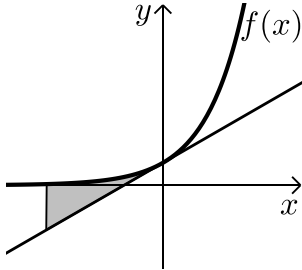
- א. מצא את  $k$ .  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות, הצירים והישר:  $x = \ln 4$ .
- (23) באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה:  $f(x) = e^x$ .  
 מעבירים ישר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$  ודרך הנקודה שבה  $x = 1$ .



- א. מצא את משוואת הישר.  
 ב. מעבירים ישר נוסף המקביל לישר שמצאת קודם וחותך את ציר ה- $y$  בנקודה:  $y = 3$ .  
 ג. מצא את משוואת הישר השני.  
 חשב את השטח הכלוא בין שני הישרים, ציר ה- $y$  וגרף הפונקציה אם ידוע כי הישר השני חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1.8$ .

24 ענה על הסעיפים הבאים :

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה :  $f(x) = e^x$  בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה- $y$ .



ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה  $f(x)$  והמשיק. חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר :  $x = -3$ .

25 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

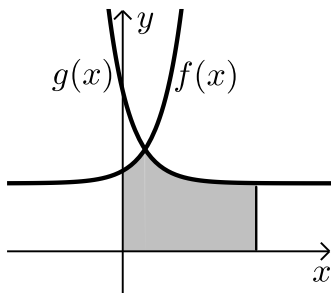
הפונקציות :  $f(x) = e^{ax-1} + 2$  ו-  $g(x) = e^{1-ax} + 2$ .

ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה  $x = \frac{1}{3}$ .

א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של

שתי הפונקציות, ציר ה- $x$  והישר  $x = 2$ .



26 נתונה הפונקציה :  $f(x) = e^{-2x} + 1$ .

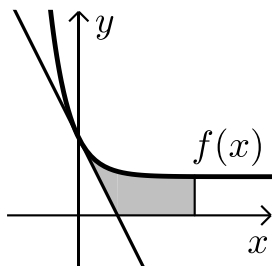
א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- $x$ .

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

המשיק, ציר ה- $x$  והישר :  $x = 3$ .



27 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה :  $f(x) = e^{x+2}$ .

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = 1$

ומעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  ויוצא מנקודת

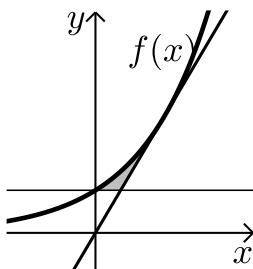
החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $y$ .

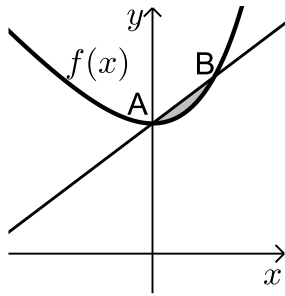
א. כתוב את משוואת המשיק והראה כי הוא

עובר דרך ראשית הצירים.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

המשיק והישר.



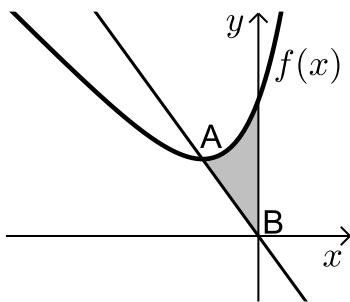


28 נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^x - x + 1$ .

הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה ובה  $x_B = 1$ .

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח הכלוא בין הישר AB וגרף הפונקציה.



29 נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{x+2} - 2x - 1$ .

הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה B נמצאת בראשית הצירים.

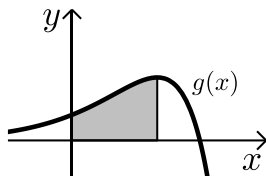
א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. כתוב את משוואת הישר העובר דרך

הנקודות A ו-B.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה,

הישר AB וציר ה-y.



30 נתונה הפונקציה:  $f(x) = (a-x)e^x$ .

א. הוכח כי:  $f'(x) = (a-1-x)e^x$ .

ב. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה  $f(x)$

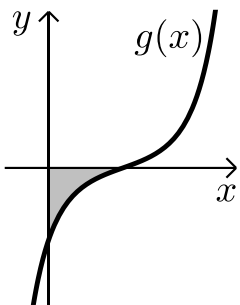
בנקודה שבה  $x=3$  הוא אפס.

מצא את  $a$ .

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $g(x) = (3-x)e^x$ .

מורידים אנך לציר ה-x מנקודת הקיצון של הפונקציה.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g(x)$ , הצירים והאנך.



31 נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{x^2-2x+k}$ .

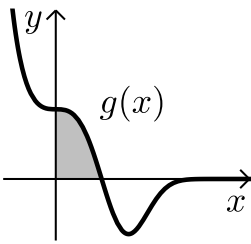
ידוע ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=3$  הוא  $4e^3$ .

א. כתוב את נגזרת הפונקציה  $f(x)$ .

ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $g(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$ .

מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה  $g(x)$  והצירים.

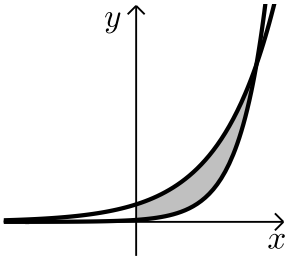




32 נתונה הפונקציה:  $f(x) = x \cdot e^{-9x^3}$ .

א. הוכח:  $f'(x) = (1 - 27x^3)e^{-9x^3}$ .

ב. באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $g(x) = (1 - 27x^3)e^{-9x^3}$ .  
חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



33 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות:  $f(x) = 9^x$  ו-  $g(x) = 9 \cdot 3^x$ .

א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .

34 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = 2^x$  ו-  $g(x) = 4^x$ .

ישר  $x = t$  חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור.

ידוע כי אורך הקטע AB הוא 240.

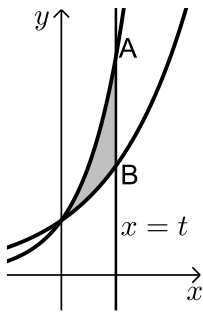
א. מצא את  $t$ .

ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות

נחתכים על ציר ה- $y$ .

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי

הפונקציות והישר שמצאת.



35 נתונות הפונקציות:  $f(x) = 2^x$  ו-  $g(x) = 4^{k-x}$ .

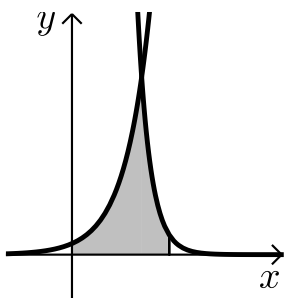
ידוע כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים

בנקודה שבה  $x = 4$ .

א. מצא את  $k$ .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של

שתי הפונקציות, הישר  $x = 8$  וציר ה- $x$ .



36 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

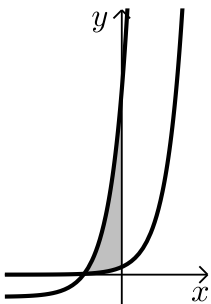
הפונקציות:  $f(x) = 3^{x+2}$  ו-  $g(x) = 3^{x+5} - 26$ .

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

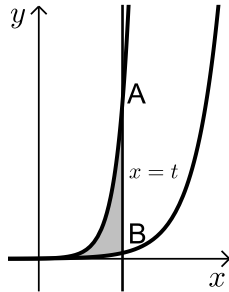
ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- $y$ .

ג. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של

שתי הפונקציות וציר ה- $y$ .



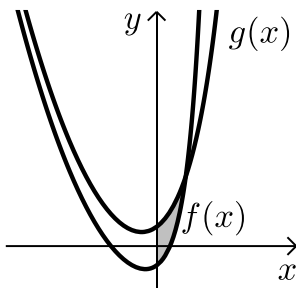
37 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = 3^x$  ו-  $g(x) = 9^x$ .



ישר  $x = t$ ,  $(t > 0)$  חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור. ידוע כי אורך הקטע AB הוא 702.

- מצא את  $t$ .
- הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה- $y$ .
- חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.

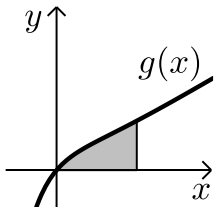
38 באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = e^{2x} + x^2 + k$  ו-  $g(x) = 2e^x + x^2$ .



ידוע כי המרחק בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה- $y$  הוא 4.

- מצא את  $k$ .
- מצא את נקודת החיתוך שבין שני הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- $y$ .

39 ענה על הסעיפים הבאים:



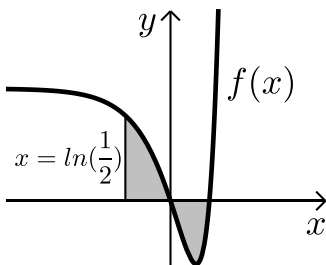
א. גזור את הפונקציה הבאה:  $f(x) = -(x+1)e^{-x}$ .

נתונה הפונקציה:  $g(x) = xe^{-x} + kx$ .

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1$  הוא 1.

- מצא את  $k$  וכתוב את הפונקציה.
- היעזר בסעיף א' וחשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x=2$ .

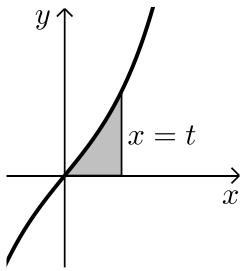
40 ענה על הסעיפים הבאים:



א. חשב את האינטגרל:  $\int_{\ln \frac{1}{2}}^{\ln 4} (e^{2x} - 5e^x + 4) dx$ .

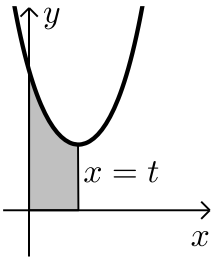
באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$ .

- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x = \ln 0.5$ .
- הסבר מדוע התוצאות שקיבלת בסעיפים א' וב' שונות.



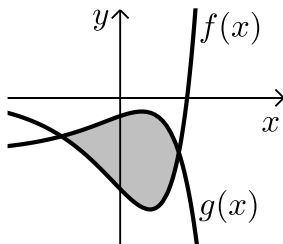
41 נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^x - e^{-x}$ .

- א. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.  
 ב. מעבירים ישר  $x = t$ ,  $t > 0$ , המאונך לציר ה- $x$  וחותר את גרף הפונקציה. ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והאנך הוא:  $S = 1\frac{1}{3}$ . מצא את  $t$ .



42 נתונה הפונקציה:  $f(x) = e^{2x} + 16e^{-2x}$ .

- א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.  
 ב. מעבירים ישר  $x = t$ ,  $t > 0$ , כמתואר באיור. ידוע כי השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה והצירים הוא:  $S = 7.5$ . הוכח כי ישר זה יוצא מנקודת הקיצון שמצאת בסעיף א'.

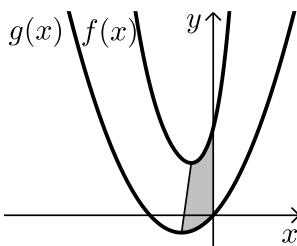


43 באיור שלפניך נתונות הפונקציות:

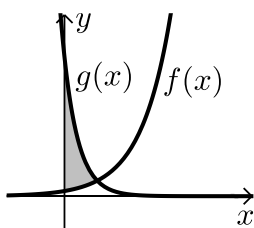
$$f(x) = 2e^{2x} - 7e^x \text{ ו- } g(x) = 3e^x - e^{2x} - 3$$

- א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים.

44 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = 4e^{2x} + e^{-x}$  ו-  $g(x) = x^2 + 2x$ .



- א. מצא את נקודות הקיצון של כל פונקציה וקבע את סוגן.  
 ב. מעבירים ישר המחבר את נקודות הקיצון של שני הגרפים כמתואר באיור. כתוב את משוואת הישר הנ"ל (עגל למספרים שלמים).  
 ג. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- $y$  והישר הנ"ל.



45 ענה על הסעיפים הבאים:

א. פתור את המשוואה הבאה:  $9 \cdot 3^x = \frac{243}{9^x}$

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = 3^{x+2}$  ו-  $g(x) = 3^{5-2x}$ .

הוכח כי השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$  שווה ל-  $\frac{90}{\ln 3}$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א.  $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$     ב.  $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$
- ג.  $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$     ד.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$
- (2) א.  $e^x + x + c$     ב.  $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$
- (3) א.  $\frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c$     ב.  $\frac{1}{2}e^{2x+2} + c$
- ג.  $\frac{0.4^x}{\ln 0.4} + \frac{3.2^x}{\ln 3.2} + \frac{200^x}{\ln 200} + c$     ד.  $8\sqrt{e^x} - \frac{3}{4}e^{\frac{-4x}{3}} + c$
- (4) א.  $2\sqrt{e^x + 3} + c$     ב.  $\frac{1}{e^x - 3x} + c$     ג.  $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
- (5)  $f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$
- (6)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1$
- (7)  $f(x) = 2e^{x^3} + \frac{1}{x} + 1$
- (8)  $S = 1\frac{1}{3}$  יח"ש
- (9)  $S = 10.72$  יח"ש
- (10)  $S = 18.41$  יח"ש
- (11)  $S = 3\frac{1}{3}$  יח"ש
- (12)  $S = 0.192$  יח"ש
- (13)  $b = 2$
- (15)  $a = \ln 2$
- (16) א.  $A(1, -e - 2)$     ב.  $y = -(e + 2)x$     ג.  $S = 4.744$  יח"ש
- (17) א.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}$ ,  $a = -2$     ב.  $1.52$
- (18) א.  $A(1, 4)$ ,  $B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right)$ ,  $C(0, 1)$     ב.  $S = 1.03$  יח"ש
- (19) א.  $y' = xe^x$     ב.  $a = 2$
- (20) יח"ג.  $1\frac{1}{8}$

- $S = \frac{e^4 - 1}{2e}$  (21)
- ב.  $S = 2.825$  יח"ש  $k = 3$  (22)
- ג.  $S \sim 3$  יח"ש  $y = (e-1)x + 3$  (23)      א.  $y = (e-1)x + 1$
- ב.  $S = 2.45$  יח"ש  $y = x + 1$  (24)
- ג.  $S \sim 4.54$  יח"ש  $g(x) = e^{1-3x} + 2, f(x) = e^{3x-1} + 2, a = 3$  (25)
- ג.  $S \sim 2.5$  יח"ש (1,0) (26)      א.  $y = -2x + 2$
- ב.  $S = \frac{e^3 - 2e^2 - e}{2} \sim 1.3$  (27)      א.  $y = e^3 x$
- ב.  $S = 1.5 - \frac{e}{2} \approx 0.14$  יח"ש  $y = (e-2)x + 2$  (28)
- ג.  $S = 3.433$  יח"ש  $y = \frac{5 - \ln 4}{\ln 2 - 2} x \sim y = -2.76x$  (29)      א.  $A(\ln 2 - 2, 5 - \ln 4)$
- ג.  $S = 2e^2 - 4 \approx 10.78$  יח"ש  $a = 4$  (30)
- ב.  $S = \frac{e-1}{e}$  (31)      א.  $f'(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$
- ב.  $S = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$  (32)
- ב.  $S = \frac{32}{\ln 3}$  (2,81) (33)
- ג.  $S = \frac{225}{\ln 4}$   $t = 4$  (34)
- ב.  $S = \frac{735}{32 \ln 2}$   $k = 6$  (35)
- ג.  $S = 52 \cdot \frac{4 - \ln 3}{\ln 3}$  (0,9) , (0,217) (36)      א. (-2,1)
- ג.  $S = \frac{338}{\ln 3}$  יח"ש  $t = 3$  (37)
- ג.  $S = \ln 27$  יח"ש (ln 3, 7.2) (38)      א.  $k = -3$
- ג.  $S = 3 - \frac{3}{e^2}$  יח"ש  $k = 1, g(x) = xe^{-x} + x, f'(x) = xe^{-x}$  (39)
- ב.  $S \sim 2.6$  (40)      א.  $4 \ln 8 - 9 \frac{5}{8} \approx -1.3$

ג. בסעיף א' חושב ערך האינטגרל בלבד. בסעיף ב' ניתן לראות כי חלקו שלילי ולכן יש לפצל אותו כדי לקבל ערך מקסימלי.

$t = \ln 3$  .ג (41)

$(\ln 2, 8)$  .נ (42)

$S = 13\frac{1}{3} - 2\ln 27 \sim 6.74$  .ג

$(\ln 3, -3)$  ,  $\left(\ln \frac{1}{3}, -2\frac{1}{9}\right)$  .נ (43)

3.46 .ג  $y = 13x + 12$  .ג

$\min(-1, -1)$  ,  $\min\left(\ln \frac{1}{2}, 3\right)$  .נ (44)

$S \sim \psi''\Gamma$

$x = 1$  .נ (45)

## פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b  + c$

### שאלות יסודיות – אינטגרל כללי:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \left( \frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx$     ב.  $\int \frac{x^2+3x-4}{x} dx$     ג.  $\int \frac{x+3}{x^2-9} dx$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \frac{x^2+3x+5}{x+1} dx$     ב.  $\int \frac{x^3-x^2+5x-6}{x-2} dx$     ג.  $\int \frac{x^4+3}{x+1} dx$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \frac{2x}{x^2-3} dx$     ב.  $\int \frac{x-1}{x^2-2x} dx$     ג.  $\int \frac{e^x}{e^x+5} dx$   
 ד.  $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$     ה.  $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$

### שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים:

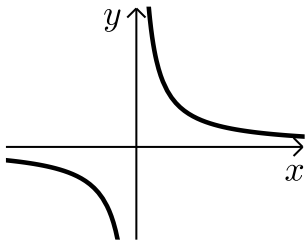
(4) נתונה נגזרת של פונקציה:  $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$ .

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

(5) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה:  $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$ . מצא את הפונקציה אם

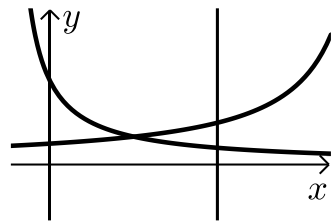
ידוע שהיא עוברת בנקודה (1, -2) וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

חישובי שטחים:



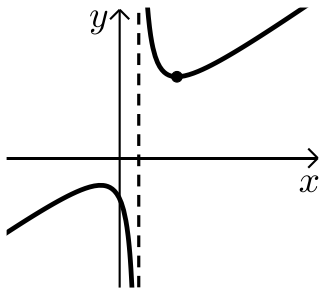
6 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x = -1$  ו- $x = -4$  וציר ה- $x$ . ניתן להשאיר  $\ln$  בתשובה.



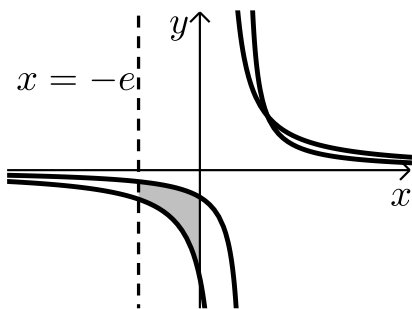
7 נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ,  $f(x) = \frac{4}{8-x}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות, הישר  $x = 4$  והצירים.



8 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ .

חשב את גודל השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק לפונקציה בנקודה שבה  $x = 2$  ואנך לציר ה- $x$  העובר בנקודת המינימום של הפונקציה. אפשר להשאיר ביטוי עם  $\ln$  בתשובה.



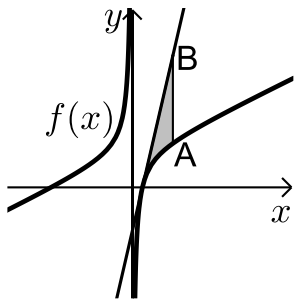
9 באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{a}{x-1}$

ו-  $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$  בתחום:  $x < 0$ .

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה  $x = 3$ .

- א. מצא את  $a$  וכתוב את שתי הפונקציות.  
 ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $y$  והישר  $x = -e$ .

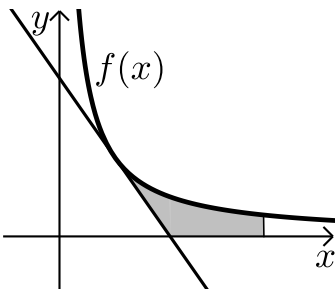




10 נתונה הפונקציה:  $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$ .

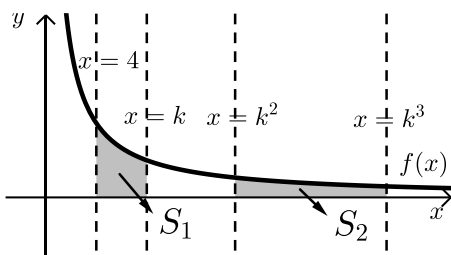
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה  
בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$  היא:  $y = 18x - 9$ .  
א. מצא את  $a$  ו- $b$  וכתוב את הפונקציה.  
מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$  שחותך את גרף  
הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B.  
אורך הקטע AB הוא 18.

- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A  
נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.



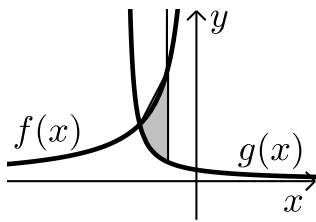
11 הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$ .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה  
שבה:  $x = 2$  היא:  $y = 4 - x$ .  
א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה  $f(x)$   
והמשיק בתחום:  $x > 0$ .  
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק,  
ציר ה- $x$  והישר  $x = e^2$ .



12 באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x}$ .

בתחום:  $x > 0$  מעבירים את הישרים:  
 $x = 4$ ,  $x = k$ ,  $x = k^2$ ,  $x = k^3$   
כמתואר  $x > 4$ .  
א. הבע באמצעות  $k$  את השטחים:  $S_1$  ו- $S_2$ .  
ב. הראה כי ההפרש:  $S_2 - S_1$  אינו תלוי ב- $k$  וחשב את ערכו.  
ג. נתון כי השטח  $S_2$  גדול פי 3 מהשטח  $S_1$ . מצא את  $k$ .



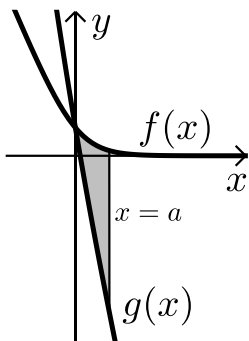
13 נתונות הפונקציות:  $f(x) = -\frac{4}{x}$  ו-  $g(x) = \frac{k}{2x+5}$ .

גרף הפונקציה  $g(x)$  חותך את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = 0.4$ .

א. מצא את הפונקציה  $g(x)$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר  $x = -1$ .



14 באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$  ו-  $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$

בתחום:  $(x \geq 0)$ .

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- $y$ .

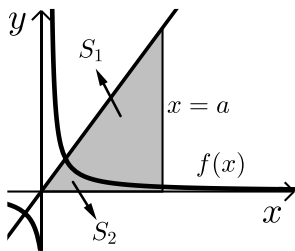
ב. מעבירים ישר  $x = a$ ,  $(a > 1)$  המאונך

לציר ה- $x$  אשר חותך את הגרפים של שתי

הפונקציות ויוצר את השטח  $S$  (ראה איור).

מצא את ערכו של  $a$  עבורו מתקיים:  $S = 4$ .

15 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{3x-1}$  והישר  $y = x$ .



א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

מעבירים אנך לציר ה- $x$   $x = a$  הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

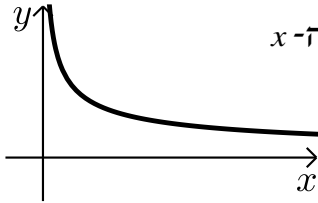
האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים  $S_1$  ו- $S_2$  המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של  $a$  עבורו השטח  $S_2$  יהיה שווה ל-  $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$ .

ג. עבור ערך ה- $a$  שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים:  $\frac{S_1}{S_2}$ .

חישובי נפחים:

16 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=1$  ו- $x=3$  וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר באופן זה. אפשר להשאיר  $\ln$  בתשובה.

17 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$ .

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר  $x = \ln \sqrt{3}$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

18 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ .

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים  $x=a$  ו- $x=a+3$  ( $a > 0$ ), וציר ה- $x$  מסתובב סביב ציר ה- $x$ . חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן הזה.

## תרגול נוסף:

19 הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = 8x - \frac{k}{x}$ .

ידוע כי יש לפונקציה נקודת מינימום  $(1,1)$ .

א. מצא את  $k$  ואת הפונקציה  $f(x)$ .

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$ ? נמק את תשובתך.

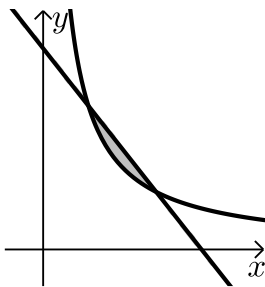
20 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3x+a}{x}$ .

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1$  הוא 6.

א. מצא את  $a$ .

ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר  $x=e$ .



21 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות:  $f(x) = \frac{10}{x}$  ו- $g(x) = -x+7$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

22 באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = \frac{a}{x}$  ו- $g(x) = x^2 + 2$ .

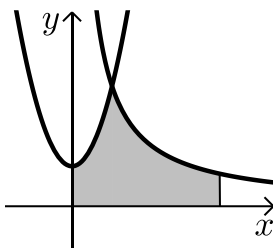
ידוע כי הגרפים נחתכים בנקודה

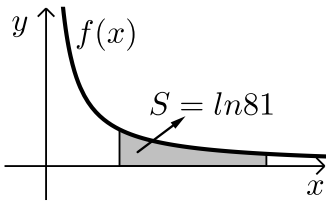
שבה  $x=2$ .

א. מצא את  $a$ .

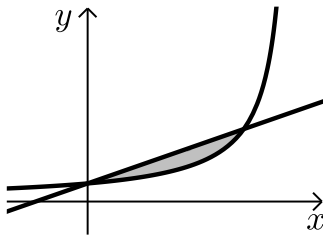
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים,

הצירים והישר  $x=e^2$ .

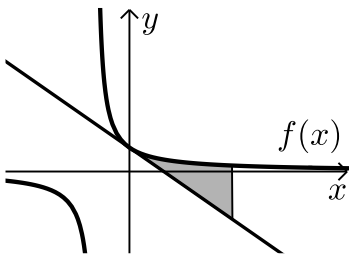




- (23)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x}$ . ידוע כי השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישרים:  $x=4$  ו- $x=4+t$  הוא  $\ln 81$ . מצא את  $t$ .

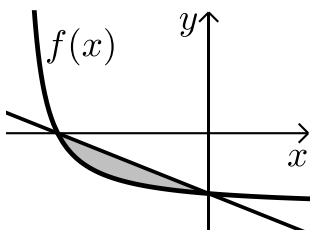


- (24)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{4e-x}$  והישר:  $g(x) = \frac{3}{4e^2}x + \frac{3}{4e}$ .  
א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.  
ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות.

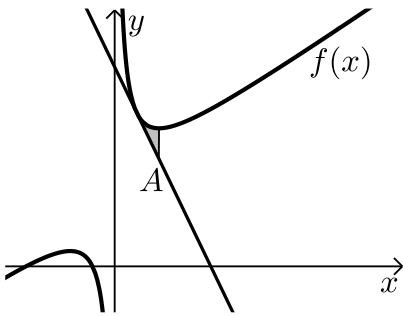


- (25)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{1}{ax+5}$ , פרמטר  $a$ . שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $y$  הוא  $-0.12$ .  
א. מצא את  $a$  וכתוב את הפונקציה.  
ב. כתוב את משוואת המשיק.  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר  $x=2$ .

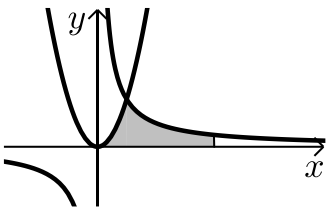
- (26)** גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{2}{x+5} - m$ , פרמטר  $m$ , חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = -4$ .



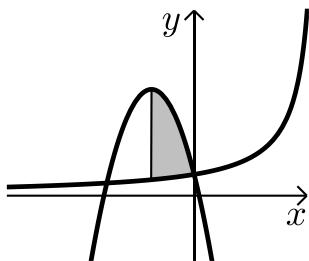
- א. מצא את ערך הפרמטר  $m$ .  
ב. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.  
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר שמצאת בסעיף הקודם.



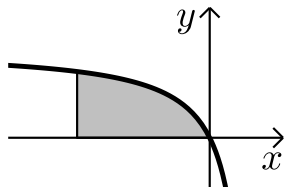
- (27)** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{4}{x} + x + 5$  בתחום:  $x > 0$ .
- א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x=1$ .  
 מעבירים ישר המקביל לציר ה- $y$  מנקודת המינימום של הפונקציה.  
 הישר חותך את משוואת המשיק בנקודה A.  
 ב. מצא את שיעורי הנקודה A.  
 ג. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק והישר.



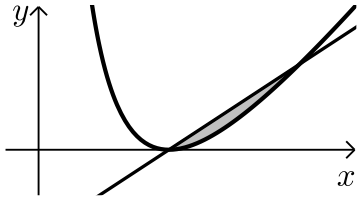
- (28)** באיור שלפניך נתונות הפונקציות:  $f(x) = 3x^2$  ו- $g(x) = \frac{3}{x}$ .
- א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- $x$  והישר:  $x = e^3$ .



- (29)** באיור שלפניך נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{6}{6-x}$  בתחום:  $x < 0$ .
- מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $y$  מעבירים את הפרבולה:  $g(x) = -x^2 - 4x + 1$ .
- א. מצא את נקודת הקודקוד של הפרבולה.  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים ואנך היוצא מנקודת הקודקוד של הפרבולה.



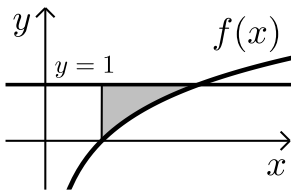
- (30)** באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{8}{x-2} + k$  בתחום:  $x < 0$ .
- ידוע כי גרף הפונקציה חותך את הישר:  $y = x + 4$  בנקודה שבה:  $x = 4$ .
- א. מצא את  $k$ .  
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- $x$  והישר:  $x = -6$ .



**31** נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x}$

- א. מצא את נקודת המינימום של הפונקציה. מעבירים ישר דרך נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה שבה  $x=4$ .
- ב. מצא את משוואת הישר.
- ג. חשב את השטח המוגבל בין הישר וגרף הפונקציה (העזר באיור).

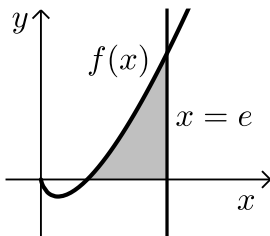
**32** ענה על הסעיפים הבאים:



- א. גזור את הפונקציה הבאה:  $y = 2x - x \ln x$ .
- ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \ln x$ . מעבירים ישר  $y=1$  החותך את גרף הפונקציה בנקודה A. מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- $x$  מעלים אנך לישר.

ב. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך והישר.

**33** ענה על הסעיפים הבאים:



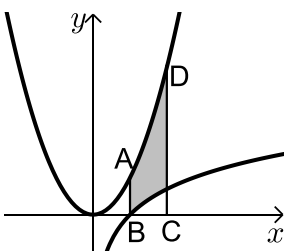
א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה:  $y = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1)$  היא:  $y' = x \ln x$ .

- ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = x \ln x$ . מעלים את הישר  $x=e$  המאונך לציר ה- $x$  החותך את גרף הפונקציה.
- ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- $x$ .

**34** ענה על הסעיפים הבאים:

א. גזור את הפונקציה הבאה:  $y = \frac{x^3}{3} + x - x \ln x$ .

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = \ln x$  ו- $g(x) = x^2 - 1$ .



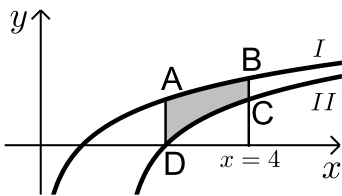
- מעבירים את הישרים  $x=1$  ו- $x=2$  המקבילים לציר ה- $y$ . ישרים אלו חותכים את הגרפים של הפונקציות בנקודות A, B, C, D בהתאמה.
- ב. חשב את השטח ABCD.

35 ענה על הסעיפים הבאים :

א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה :  $y = 2 \ln(x-2) + x \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$

היא :  $y' = \ln\left(\frac{x}{x-2}\right)$ .

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות :  $f(x) = \ln x$  ו-  $g(x) = \ln(x-2)$ .



ב. קבע איזה מבין הגרפים I, II מתאר את  $f(x)$

ואיזה את  $g(x)$ . נמק.

ג. מצא את נקודת החיתוך של כל גרף עם ציר ה- $x$ .

ד. מנקודת החיתוך הגדולה יותר שמצאת בסעיף

הקודם מעלים אנך לציר ה- $x$  מהנקודה D,

החותך את הגרף השני בנקודה A (ראה איור).

מעבירים אנך נוסף  $x=4$  החותך את הגרפים בנקודות B ו-C.

העזר בסעיף א' וחשב את השטח ABCD - הכלוא בין שני הגרפים.



## תשובות סופיות:

$$\ln|x-3|+c \quad \lambda \quad \frac{x^2}{2}+3x-4\ln|x|+c \quad \text{ב.} \quad 3\ln|x|+2\ln|x+1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}+c \quad \text{א.} \quad (1)$$

$$\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+7x+8\ln|x-2|+c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2}+2x+3\ln|x+1|+c \quad \text{א.} \quad (2)$$

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x+4\ln|x+1|+c \quad \lambda$$

$$\ln|e^x+5|+c \quad \lambda \quad \frac{1}{2}\ln|x^2-2x|+c \quad \text{ב.} \quad \ln|x^2-3|+c \quad \text{א.} \quad (3)$$

$$\ln|\sin x|+c \quad \text{ה.} \quad \ln|e^x+e^{-x}|+c \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = x^2 - \ln|x-4| + 3 \quad (4)$$

$$f(x) = x^3 + \ln|x| - x - 2 \quad (5)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 4 \quad (6)$$

$$S = \text{יח"ש} 2.17 \quad (7)$$

$$S = \text{יח"ש} 4\ln 2 - 2 \quad (8)$$

$$S = \text{יח"ש} 1.76 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{2}{x-1}, \quad g(x) = \frac{1}{x-2}, \quad a = 2 \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$x = 2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = 7 + 2x - \frac{4}{x}, \quad a = 2, \quad b = -4 \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$S = 6 + \ln 256 \approx \text{יח"ש} 11.54 \quad \lambda$$

$$S = \text{יח"ש} 6 - 4\ln 2 \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$k = 8 \quad \lambda \quad S_2 - S_1 = \ln 16 \quad \text{ב.} \quad S_1 = 2\ln k - \ln 16, \quad S_2 = 2\ln k \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$S = \text{יח"ש} \ln 5 \frac{1}{3} \approx 1.674 \quad \lambda \quad (-2, 2) \quad \text{ב.} \quad g(x) = \frac{2}{2x+5} \quad \text{א.} \quad (13)$$

$$a = 2 \quad \text{ב.} \quad (14)$$

$$\frac{S_1}{S_2} = 5.955 \quad \lambda \quad a = 5 \quad \text{ב.} \quad (1, 1) \quad \text{א.} \quad (15)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \ln 3 \quad (16)$$

$$V = \text{יח"נ} \frac{\pi}{2} \ln 2 \quad (17)$$

$$V = \text{יח"נ} \pi \left( 19 \frac{1}{2} + 4\ln 4 \right) \quad (18)$$

19. א.  $k=8$ ,  $f(x)=4x^2-8\ln|x|-3$ ,  $x \neq 0$ . ב.  $x < -1$ ,  $0 < x < 1$ : יורדת,  $-1 < x < 0$ ,  $x > 1$ : עולה. ג. לא. הנקודות הנמוכות ביותר בתחום הגדרתה נמצאות מעל לציר ה- $x$  ולכן גם כל גרף הפונקציה.
20. א.  $a=-6$ . ב.  $(2,0)$ . ג.  $S=3e+\ln 64-12$  יח"ש
21. א.  $(2,5)$ ,  $(5,2)$ . ב.  $S=10.5+10(\ln 2-\ln 5)$  יח"ש
22. א.  $a=12$ . ב.  $S=30\frac{2}{3}-12\ln 2$  יח"ש
23.  $t=8$
24. א.  $\left(0, \frac{3}{4e}\right)$ ,  $\left(3e, \frac{3}{e}\right)$ . ב.  $S=5\frac{5}{8}-\ln 64$  יח"ש
25. א.  $a=3$ ,  $f(x)=\frac{1}{3x+5}$ . ב.  $y=-0.12x+0.2$ . ג.  $S=0.1$  יח"ש
26. א.  $m=2$ . ב.  $y=-\frac{2}{5}x-1\frac{3}{5}$ . ג.  $S=4.8-\ln 25 \approx 1.58$  יח"ש
27. א.  $y=-3x+13$ . ב.  $(2,7)$ . ג.  $S=\ln 16-2 \approx 0.772$  יח"ש
28. א.  $(1,3)$ . ב.  $S=10$  יח"ש
29. א.  $(-2,5)$ . ב.  $S=7\frac{1}{3}-6(\ln 8-\ln 6) \approx 5.6$  יח"ש
30. א.  $k=4$ . ב.  $S=24-16\ln 2$  יח"ש
31. א.  $(2,0)$ . ב.  $y=\frac{1}{2}x-1$ . ג.  $S=3-\ln 16$  יח"ש
32. א.  $y'=1-\ln x$ . ב.  $S=e-2$  יח"ש
33. ב.  $S=\frac{e^2+1}{4}$
34. א.  $y'=x^2-\ln x$ . ב.  $S=3\frac{1}{3}-\ln 4 \approx 1.94$  יח"ש
35. א.  $f(x)=I$ ,  $g(x)=II$ . ג.  $(1,0)$ ,  $(3,0)$ . ד.  $S=3\ln \frac{4}{3} \approx 0.863$  יח"ש

## פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרלים מייזים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה:  $\frac{m}{n} \neq -1$ .

### שאלות יסודיות – אינטגרל של פונקצית חזקה:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \int \sqrt[3]{x} dx & \text{א.} & \int (4x - 2\sqrt[4]{x}) dx & \text{ב.} & \int (x \cdot \sqrt[5]{x}) dx & \text{ג.} \\
 \int \frac{3}{\sqrt[3]{x}} dx & \text{ד.} & \int \frac{x+4}{\sqrt[4]{x}} dx & \text{ה.} & \int \frac{x^3 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx & \text{ו.} \\
 \int \sqrt[3]{2x-3} dx & \text{ז.} & \int \sqrt[4]{5-x} dx & \text{ח.} & \int \frac{3}{\sqrt[8]{7x+12}} dx & \text{ט.} \\
 \int \frac{7}{\sqrt[5]{14-2x}} dx & \text{י.} & & & & 
 \end{array}$$

(2) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{lll}
 \int_0^8 (x + \sqrt[5]{4x}) dx & \text{א.} & \int_3^{16} (\sqrt[4]{5x+1}) dx & \text{ב.} & \int_{-10}^5 \frac{2}{\sqrt[4]{6-x}} dx & \text{ג.}
 \end{array}$$

**שאלות יסודיות – אינטגרל מסוים:**

(3) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = 2x - \sqrt[3]{4x}$ .

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה  $(2,3)$ .  
מצא את הפונקציה.

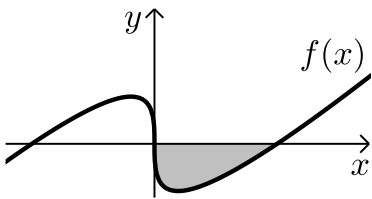
(4) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{5x+7}$ .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 4$ .  
מצא את הפונקציה.

(5) נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{10}{\sqrt[3]{x+1}} + (x-1)^2$ .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $y$  בנקודה שבה  $y = -6$ .  
מצא את הפונקציה.

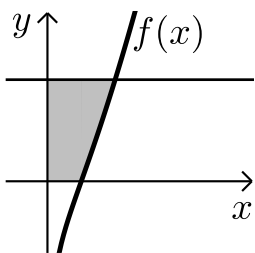
**חישובי שטחים:**



(6) באיור שלפניך מופיע גרף הפונקציה:  $f(x) = x - 4\sqrt[3]{x}$ .

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

ב. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה והצירים.



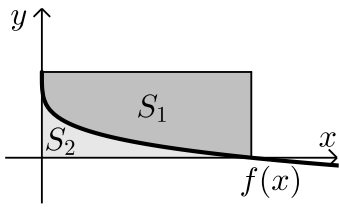
(7) באיור שלפניך מצויר גרף הפונקציה:  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x}}$ .

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .

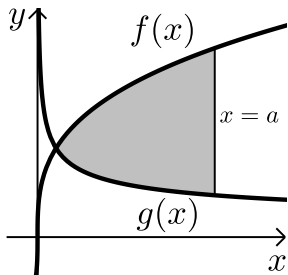
ג. מעבירים אנך לציר ה- $y$  מהנקודה  $(4,6)$ .

חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה, האנך והצירים.



- 8 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$ .  
 מעבירים אנכים לצירים מנקודות החיתוך של  
 גרף הפונקציה עם הצירים כך שנוצר מלבן.  
 מסמנים את השטח שבין גרף הפונקציה והצירים:  
 ב-  $S_1$  ואת השטח שבין גרף הפונקציה והאנכים ב-  $S_2$ .  
 מצא את היחס:  $\frac{S_1}{S_2}$ .

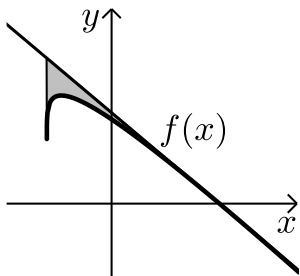
- 9 באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות הבאות:  $f(x) = 4\sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ .



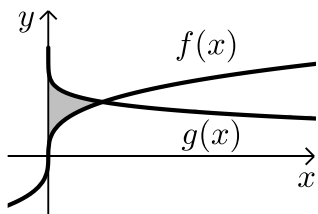
- א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים בתחום:  $x > 0$ .  
 ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ( $a$  פרמטר).  
 ידוע כי השטח שנוצר בין שני הגרפים מנקודת  
 החיתוך שלהם ועד לאנך הוא:  $42\frac{3}{16}$  סמ"ר.  
 מצא את  $a$ .

- 10 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$ , ( $a$  פרמטר).

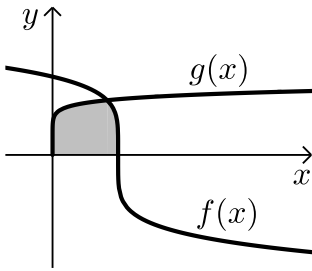
ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x = 2$ .



- א. מצא את הפרמטר  $a$  וכתוב את הפונקציה.  
 ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.  
 ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר  
 דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- $x$ .  
 ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$   
 והמשיק שמצאת בסעיף הקודם. מורידים אנך  
 מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה שמצאת בסעיף ג'.  
 חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה  $f(x)$  והמשיק.

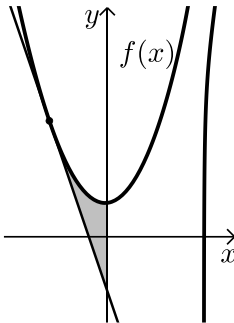


- 11 באיור שלפניך נתונים הגרפים של  
 הפונקציות:  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$ .  
 א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- $y$ .



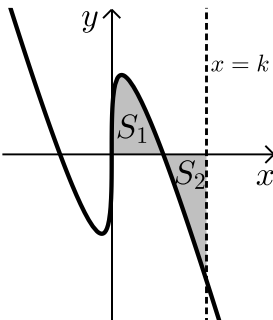
12 הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

- ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- $x$  בנקודה שבה:  $x=1.2$ .  
 א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , גרף הפונקציה:  $g(x) = \sqrt[10]{x}$  וציר ה- $x$ .



13 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה  $x = -3$ .  
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $f(x)$ , המשיק וציר ה- $y$ .



14 נתונה הפונקציה:  $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?  
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$ .  
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  יסומן ב- $S_1$ .  
 מעבירים ישר  $x=k$  אשר יוצר את השטח  $S_2$  כמתואר. מצא את  $k$  אם ידוע כי:  $S_1 = S_2$ .

## תרגול נוסף:

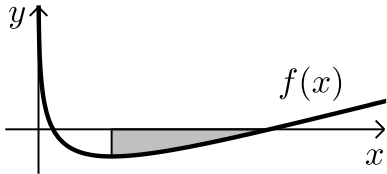
15 נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}$

- ידוע כי הישר  $y = 6x - 380$  משיק לגרף הפונקציה. מצא את הפונקציה.

16 נתונה הנגזרת הבאה:  $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{\sqrt{x}}$

ידוע כי שיעור ה- $y$  של נקודת הקיצון של הפונקציה הוא 4. מצא את הפונקציה.

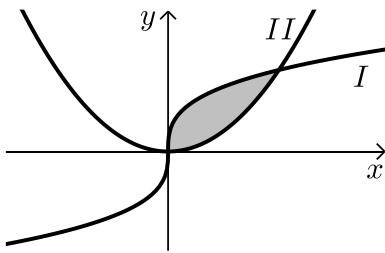
17 באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה:  $f(x) = \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2$



מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים אנך לציר ה- $x$ . מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה- $x$ .

18 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:  $f(x) = x^2$  ו- $g(x) = 32\sqrt[3]{x}$

בתחום:  $x \geq 0$ .



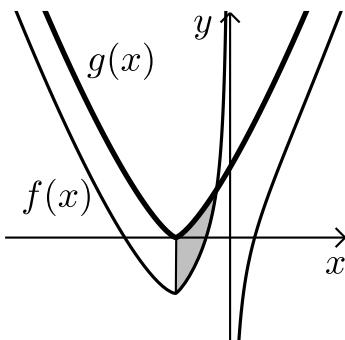
- קבע איזה מבין הגרפים I ו-II שייך לכל פונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.

\*הערה: בתרגיל הבא יש שימוש גם באינטגרל לוגריתמי.

19 הנגזרת של הפונקציה  $f(x)$  היא:  $f'(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x+2}$

א. מצא את הפונקציה  $f(x)$  אם ידוע כי הישר:  $4y - 8x = 7$  חותך אותה כאשר:  $x = -1$ .

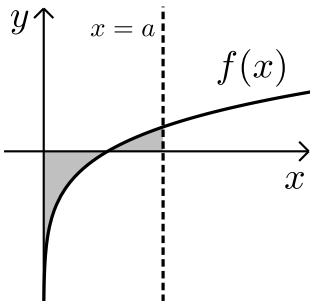
ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x)$  בתחום:  $x < 0$ .



מגדירים פונקציה נוספת:  $g(x) = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4}$

ואף היא מסורטטת באיור.

- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות.
- חשב את השטח הכלוא ביניהן והישר:  $x = -2$ .

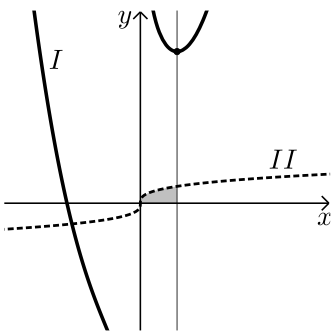


20 נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = \sqrt[5]{x} + 2\sqrt[10]{x} - 3$

- א. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.  
 ב. מעבירים אנך לציר ה- $x$ ,  $x = a$ , (פרמטר). מצא את הערך של  $a$  עבורו השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- $x$  בין נקודת החיתוך שלהם ועד לאנך הוא :  $S - \frac{7}{66}a^{1.2}$  כאשר  $S$  הוא השטח שמצאת בסעיף הקודם.

21 נתונה הפונקציה הבאה :  $f(x) = \frac{x^3 + B}{\sqrt[4]{x}}$ , (פרמטרים טבעיים).

- מגדירים פונקציה נוספת :  $g(x) = \sqrt[4]{x}$ .  
 ידוע כי מכפלת הפונקציות שווה לביטוי הבא :  $f(x) \cdot g(x) = x^3 + 8$ .  
 א. מצא את ערך הפרמטר  $B$ .  
 ב. מגדירים את פונקציית ההפרש הבאה :  $h(x) = f(x) - g(x)$ . מצא את ערך הפרמטר  $a$  אם ידוע כי  $h(8) = 258$ .  
 ג. באיור שלפניך מצוירים הגרפים של הפונקציות  $f(x)$  ו- $g(x)$ .



- i. התאם לכל גרף את הפונקציה המתאימה : I ו-II.  
 ii. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .  
 iii. מורידים אנך לציר ה- $x$  מנקודת הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ .  
 חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה  $g(x)$ , האנך וציר ה- $x$ .



## תשובות סופיות:

- (1) א.  $0.75\sqrt[3]{x^4} + c$     ב.  $2x^2 - 1.6\sqrt[4]{x^5} + c$     ג.  $\frac{5}{11}\sqrt[5]{x^{11}} + c$
- ד.  $4.5\sqrt[3]{x^2} + c$     ה.  $\frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + \frac{16}{3}\sqrt[4]{x^3} + c$
- ו.  $\frac{2}{7}\sqrt{x^7} - 2\sqrt{x^3} + 10\sqrt{x} + c$     ז.  $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-3)^4} + c$
- ח.  $-0.8\sqrt[4]{(5-x)^5} + c$     ט.  $\frac{24}{49}\sqrt[8]{(7x+12)^7} + c$     י.  $-\frac{35}{8}\sqrt[5]{(14-2x)^4} + c$
- (2) א.  $45\frac{1}{3}$     ב. 33.76    ג.  $18\frac{2}{3}$
- (3)  $f(x) = x^2 - \frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4} + 2$
- (4)  $f(x) = \frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4} - 12.15$
- (5)  $f(x) = 12.5\sqrt[5]{(x+1)^4} + \frac{1}{3}(x-1)^3 - 18\frac{1}{6}$
- (6) א.  $(0,0)$  ;  $(8,0)$     ב.  $S = \text{יח"ש}$
- (7) א.  $x > 0$     ב.  $(2,0)$     ג.  $S = 18.149$
- (8)  $\frac{S_1}{S_2} = 4$
- (9) א.  $\left(\frac{1}{8}, 2\right)$     ב.  $a = 8$
- (10) א.  $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x$  ,  $a = 1$     ב.  $x \geq -1.2$     ג.  $(-1.2, 1.2)$
- ד.  $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$     ה.  $S = \text{יח"ש}$  0.48
- (11) א.  $(1,1)$     ב.  $S = \text{יח"ש}$   $\frac{11}{28}$

ב.  $S = \text{ש"ש} 1\frac{5}{66}$       א.  $f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}}$  (12)

ב.  $S = \text{ש"ש} 4.56$       א.  $y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16}$  (13)

ב.  $(0,0), \left(\frac{1}{8},0\right), \left(-\frac{1}{8},0\right)$       א. כל  $x$  (14)

ג.  $k = \left(\frac{3}{8}\right)^{1.5} = 0.2296..$

$f(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + \frac{6\sqrt[6]{x^7}}{7} - 297\frac{5}{7}$  (15)

$f(x) = 0.4\sqrt{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} - 6\sqrt{x} + 8\frac{4}{15}$  (16)

א.  $S = \text{ש"ש} 1\frac{301}{480} \sim 1.627$  (17)

א.  $S = \text{ש"ש} 213\frac{1}{3}$       ב.  $(0,0); (8,64)$       א.  $I-g(x); II-f(x)$  (18)

ב. i.  $(-0.5, 1.28)$       א.  $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+2)^4} - 2$  (19)

ב. ii.  $S = \text{ש"ש} 3 - \ln 4$

ב.  $a = \left(\frac{33}{31}\right)^{10}$       א.  $S = \text{ש"ש} \frac{23}{66}$  (20)

א. i.  $II-g(x); I-f(x)$       ב.  $a=3$       א.  $B=8$  (21)

א. ii.  $(1,9)$       א. iii.  $S = \text{ש"ש} 0.75$