

תוכן העניינים:

| | |
|----|--|
| 2 | פרק 10 |
| 2 | מספרים מרוכבים |
| 2 | סיכום כללי : |
| 2 | הגדרות כלליות : |
| 2 | צמוד קומפלקסי (מרוכב) : |
| 2 | מישור גאוס והצגה קוטבית (פולרית) של מספר מרוכב : |
| 3 | נוסחאות ומעברים : |
| 3 | פעולות חשבון בהצגה קוטבית : |
| 3 | משפט דה-מואבר : |
| 3 | שורשים של מספר מרוכב : |
| 4 | שאלות : |
| 4 | הגדרת המספר המרוכב : |
| 6 | המספר הצמוד : |
| 7 | חקירת משוואה ריבועית מרוכבת : |
| 7 | מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב : |
| 9 | נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב : |
| 10 | שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים : |
| 10 | שאלות שונות עם מספרים מרוכבים : |
| 12 | תשובות סופיות : |

פרק 10

מספרים מרוכבים

סיכום כללי:

הגדרות כלליות:

ע"י הסימון: $i = \sqrt{-1}$ מגדירים את המספר מהצורה: $z = a + bi$ כמספר מרוכב בעל חלק ממשי a וחלק מדומה b . המספרים a ו- b הם ממשיים.

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$ (מלשון: Real).

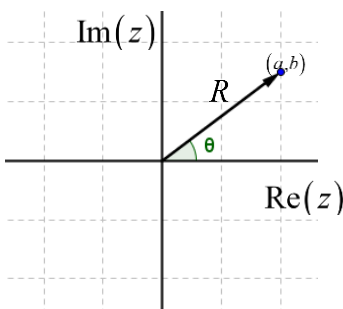
b נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$ (מלשון: Imaginary).

צמוד קומפלקסי (מרוכב):

לכל מספר מרוכב $z = a + bi$ קיים מספר צמוד המסומן ב- \bar{z} וערכו: $\bar{z} = a - bi$.

מישור גאוס והצגה קוטבית (פולרית) של מספר מרוכב:

ניתן לאפיין מספר מרוכב z ע"י הצגתו במישור שבו ציר ה- x מייצג את a , גודל הערך הממשי של z , וציר ה- y מייצג את b , גודל הערך המדומה של z . מישור זה נקרא **מישור גאוס** ומופיע באיור הסמוך.



במישור גאוס ניתן לאפיין כל נקודה ע"י הזוג: (a, b)

או ע"י הערך המוחלט של המספר (מרחקו מ- $(0,0)$)

והזווית שלו בין הקרן החיובית של הציר הממשי לרדיוס.

הצמד הנ"ל מוגדר כהצגה קוטבית של מספר מרוכב

ויסומן: (R, θ) . מספר מרוכב בהצגה קוטבית:

$$z = R \cos \theta + i \cdot R \sin \theta = R(\cos \theta + i \sin \theta) = R \text{cis} \theta$$

נוסחאות ומעברים:

- מעבר מהצגה קוטבית לקרטזית (אלגברית): $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$.
- מעבר מהצגה קרטזית לקוטבית: $a = R \cos \theta$, $b = R \sin \theta$.
- גודל של מספר מרוכב z יסומן $|z|$ ויחושב: $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$.

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

- כפל מספרים מרוכבים: $z_1 \cdot z_2 = (R_1 \text{cis } \theta_1) \cdot (R_2 \text{cis } \theta_2) = R_1 R_2 \text{cis } (\theta_1 + \theta_2)$.
- חילוק מספרים מרוכבים: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \text{cis } \theta_1}{R_2 \text{cis } \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \text{cis } (\theta_1 - \theta_2)$.

משפט דה-מואבר:

כדי להעלות מספר מרוכב z בחזקת n נעזר בקשר: $(R \text{cis } \theta)^n = R^n \text{cis } (n\theta)$.

שורשים של מספר מרוכב:

כדי להוציא שורש n -י של מספר מרוכב z השווה למספר מרוכב אחר $z_0 = R_0 \text{cis } \theta_0$

$$\cdot z^n = z_0 = R_0 \text{cis } \theta_0 / \sqrt[n]{} \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R_0} \cdot \text{cis} \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) : 1 \leq k \leq n$$

נבצע:

שאלות:

הגדרת המספר המרוכב:

(1) רשום עם i :

| | | |
|-------------------|------------------|------------------|
| $\sqrt{-25} =$.ג | $\sqrt{-4} =$.ב | $\sqrt{-1} =$.א |
| | $\sqrt{-5} =$.ה | $\sqrt{-3} =$.ד |

(2) חשב:

| | | |
|---------------|------------|------------|
| $i^3 =$.ג | $i^2 =$.ב | $i =$.א |
| $i^{17} =$.ו | $i^5 =$.ה | $i^4 =$.ד |

(3) רשום את ערכם של a ו- b בעבור המספרים המרוכבים הבאים:

| | | |
|--|------------|-------------|
| $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.ג | $3 - i$.ב | $2 + 5i$.א |
| 0 .ו | -4 .ה | $7i$.ד |

(4) כתוב מספר מרוכב z לפי הדרישות הבאות:

.א $\operatorname{Re}(z) = -3, \operatorname{Im}(z) = 2$

.ב $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) מספר מרוכב מסוים z מקיים: $\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) = 4$ ו- $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z) = -1$. מצא את z .

(6) פתור את המשוואות הבאות:

| | | |
|-----------------------|-------------------|---------------|
| $x^2 - 2x + 5 = 0$.ג | $x^2 + 36 = 0$.ב | $x^2 = -1$.א |
|-----------------------|-------------------|---------------|

(7) פתור את המשוואה הבאה: $x^2 + x + 1 = 0$.

(8) פתור את המשוואה הבאה: $z^2 + iz + 6 = 0$.

9 נתון: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים המרוכבים הבאים:

א. $z_1 + z_2 =$ ב. $z_1 - z_2 =$ ג. $z_1 \cdot z_2 =$

10 חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(-2 + 6i) + (1 - i)$ ב. $(4 + 4i) - \left(3 + \frac{1}{2}i\right)$

ג. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ד. $5 - (3 - 2i)$

ה. $(i - 3) + 6i$ ו. $(i + 2) - (3i - 2) + (7 - 5i)$

11 חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $(1 + 4i) \cdot (8 - 2i)$ ב. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

ג. $(4i - 3) \cdot (4i + 3)$ ד. $i \cdot (i - 1)$

ה. $(2i + 3) \cdot i$ ו. $(5i - 1)^2$

12 נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$. ידוע כי $z_1 + z_2$ הוא ממשי וכי $z_1 - z_2$ הוא מדומה.

א. מצא קשר בין a_1 ל- a_2 וקשר בין b_1 ו- b_2 .

ב. הראה כי המכפלה $z_1 \cdot z_2$ היא ממשית.

המספר הצמוד:

(13) רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

| | | |
|-----------|----------|--------------------------------------|
| א. $2+5i$ | ב. $3-i$ | ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ |
| ד. $7i$ | ה. -4 | ו. 0 |

(14) חשב:

| | | |
|------------------------|------------------------|-------------------------|
| א. $\frac{11+2i}{2-i}$ | ב. $\frac{3+7i}{2-5i}$ | ג. $\frac{19-9i}{2-3i}$ |
|------------------------|------------------------|-------------------------|

(15) נתון מספר $z = 5 - 2i$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

| | | |
|------------------|--------------------|----------------------|
| א. $\frac{1}{z}$ | ב. $\frac{z}{z+3}$ | ג. $\frac{z+i}{z-i}$ |
|------------------|--------------------|----------------------|

(16) המספר $\frac{3+4i}{a-i}$ הוא ממשי טהור. מצא את a .

(17) נתונים שני מספרים מרוכבים $z_1 = a_1 + b_1i$ ו- $z_2 = a_2 + b_2i$.

הראה כי כדי שתוצאת החילוק $\frac{z_1}{z_2}$ תהיה ממשית טהורה, צריך להתקיים: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

(18) פתור את המשוואה הבאה: $3z - 11 = iz - 7i$.

(19) פתור את המשוואה הבאה: $iz + 5 = 4i$.

(20) פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

(21) פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

| | |
|------------------------|----------------------------------|
| א. $2a - 3i = 10 + bi$ | ב. $3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$ |
|------------------------|----------------------------------|

(22) פתור את המשוואה הבאה : $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$.

(23) חשב את ערכי המספרים המרוכבים הבאים :

א. $\sqrt{5-12i}$ ב. $\sqrt{8+6i}$

(24) פתור את המשוואות הריבועיות הבאות :

א. $(1-i)z^2 - 2z + i + 1 = 0$.

ב. $(-2+i)z^2 - (6+12i)z + 10 - 25i = 0$.

(25) פתור את המשוואה הבאה : $iz^2 - 2(1-i)z + 6 + 15i = 0$.

(26) פתור את המשוואה הבאה : $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$.

חקירת משוואה ריבועית מרוכבת:

(27) נתונה המשוואה הבאה : $(mi - 2)z^2 - 2(m + 2i)z + 1 = 0$

מצא לאלו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה :

א. יש פתרון יחיד.

ב. אין פתרון.

מישור גאוס והצגה קוטבית של מספר מרוכב:

(28) כתוב את המספרים המרוכבים הבאים בהצגה אלגברית :

| | | |
|---------------------------|---------------------------|-----------------------------|
| ג. $4\text{cis}330^\circ$ | ב. $6\text{cis}135^\circ$ | א. $2\text{cis}60^\circ$ |
| ו. $8\text{cis}90^\circ$ | ה. $4\text{cis}690^\circ$ | ד. $4\text{cis}(-30^\circ)$ |
| ט. $\text{cis}0^\circ$ | ח. $\text{cis}180^\circ$ | ז. $3\text{cis}270^\circ$ |

29) הפוך להצגה קוטבית:

- | | | |
|-----------|-----------------|---------------------------------------|
| א. $1+i$ | ב. $\sqrt{3}-i$ | ג. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ |
| ד. $3+4i$ | ה. $6i$ | ו. $-i$ |
| ז. 4 | ח. -1 | ט. 1 |
| י. 0 | | |

30) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|--|---|
| א. $2\text{cis}120^\circ \cdot 3\text{cis}60^\circ$ | ב. $\text{cis}210^\circ \cdot 5\text{cis}(-40^\circ)$ |
| ג. $\frac{12\text{cis}315^\circ}{3\text{cis}90^\circ}$ | ד. $\frac{1}{2\text{cis}40^\circ}$ |
| ה. $6\text{cis}30^\circ + 2\text{cis}210^\circ$ | |

31) נתון המספר המרוכב $z = R\text{cis}\theta$. הבע באמצעות R ו- θ את המספרים:

- | | | |
|-------------------|----------|----------------------|
| א. \bar{z} | ב. $1/z$ | ג. $-z$ |
| ד. $-\frac{1}{z}$ | ה. iz | ו. $z \cdot \bar{z}$ |

32) הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

- | | | |
|------------------|----------------------|--|
| א. $z + \bar{z}$ | ב. $z \cdot \bar{z}$ | ג. $\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$ |
|------------------|----------------------|--|

33) הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

- | | |
|----------------------|--------------------------------------|
| א. $z^2 - \bar{z}^2$ | ב. $\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$ |
|----------------------|--------------------------------------|

34) הוכח את הטענות הבאות:

- | | |
|---|------------------------------|
| א. $z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz}$ | ב. $z \cdot \bar{z} = z ^2$ |
|---|------------------------------|

35) מצא את קדקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

(36) ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

(37) משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

(38) משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קודקוד הראש של המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

(39) z הוא מספר מרוכב במישור גאוס הנמצא מחוץ למעגל היחידה. קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

א. \bar{z} ב. $\frac{1}{z}$ ג. $\frac{z}{\bar{z}}$ ד. $z \cdot \bar{z}$

נוסחת דה-מואבר למציאת שורשים של מספר מרוכב:

(40) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בנוסחת דה-מואבר:

א. $(2\text{cis}30^\circ)^3$ ב. $(2\text{cis}14^\circ)^5$ ג. $(1+i)^4$

ד. $(\sqrt{3}-i)^3$ ה. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$

(41) פתור את המשוואות הבאות:

א. $z^2 = 36\text{cis}120^\circ$ ב. $z^4 = (9\text{cis}80^\circ)^2$ ג. $z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(42) מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

(43) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$.

מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z| = 2$

(44) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z - 3i| = 5$.

(45) נתון המספר המרוכב $z = x + iy$. מצא את המקום הגאומטרי במישור גאוס המתקבל בעבור המשוואה: $|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$.

שאלות בסדרות עם מספרים מרוכבים:

(46) בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5 - 9i$. מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

(47) בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.
א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.
ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

(48) נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2. נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית. מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

שאלות שונות עם מספרים מרוכבים:

(49) פתור את המשוואה: $z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \text{Im}(z)$.

(50) פתור את המשוואה: $|2 - 3^{x^2 - x - 1}i| = \sqrt{13}$.

(51) פתור את המשוואה: $z^3 = \bar{z}$.

(52) הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

(53) נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים. הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

(54) נתון מספר מרוכב z , שאינו ממשי טהור ואינו מדומה טהור. הוכח כי אם $z - \frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

(55) הוכח את הנוסחה הבאה: $R_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot R_2 \operatorname{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$.

(56) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון. נתון: $|z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$. מצא את $\arg(z)$.

(57) z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה. מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

(58) z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2 \cos \theta \cdot z + 1 = 0$. הבע באמצעות θ את גודל הזווית $\sphericalangle z_1 O z_2$ (ראשית הצירים).

תשובות סופיות:

- (1) א. i ב. $2i$ ג. $5i$ ד. $\sqrt{3}i$ ה. $\sqrt{5}i$
- (2) א. i ב. -1 ג. $-i$ ד. 1 ה. i ו. i
- (3) א. $a=2, b=5$ ב. $a=3, b=-1$ ג. $a=\frac{\sqrt{3}}{2}, b=-\frac{1}{2}$ ד. $a=0, b=7$ ה. $a=-4, b=0$ ו. $a=0, b=0$
- (4) א. $z=-3+2i$ ב. $z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$
- (5) $z=1.5+2.5i$
- (6) א. $x=\pm i$ ב. $x=\pm 6i$ ג. $x=1+2i, 1-2i$
- (7) $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (8) $z=2i, -3i$
- (9) א. $7+i$ ב. $-3+5i$ ג. $16+11i$
- (10) א. $-1+5i$ ב. $1+3\frac{1}{2}i$ ג. $-\sqrt{3}i$ ד. $2+2i$ ה. $-3+7i$ ו. $11-7i$
- (11) א. $16+30i$ ב. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$ ג. -25 ד. $-1-i$ ה. $-2+3i$ ו. $-24-10i$
- (12) א. $a_1=a_2, b_1=-b_2$ ב. הוכחה.
- (13) א. $2-5i$ ב. $3+i$ ג. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ ד. $-7i$ ה. -4 ו. 0
- (14) א. $4+3i$ ב. $-1+i$ ג. $.5+3i$
- (15) א. $\frac{5}{29}+\frac{2}{29}i$ ב. $\frac{11}{17}-\frac{3}{34}i$ ג. $\frac{14}{17}+\frac{5}{17}i$
- (16) $a=-\frac{3}{4}$
- (17) שאלת הוכחה.
- (18) $z=4-i$
- (19) $z=4+5i$
- (20) $z=2-3i, w=5+i$
- (21) א. $a=5, b=-3$ ב. $a=2, b=-1$
- (22) $z=-\frac{1}{2}-2\frac{1}{2}i$
- (23) א. $z=\pm(3-2i)$ ב. $z=\pm(3+i)$

24. א. $z_{1,2} = i, 1$. ב. $z_{1,2} = -2 - i, 2 - 5i$
25. $z_1 = -2 - 5i, z_2 = 3i$
26. $z_1 = -3i, z_2 = 2i$
27. א. $m = -i$. ב. $m = -2i$
28. א. $1 + \sqrt{3}i$. ב. $-3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}i$. ג. $2\sqrt{3} - 2i$. ד. $2\sqrt{3} - 2i$. ה. $2\sqrt{3} - 2i$. ו. $8i$. ז. $-3i$. ח. -1 . ט. 1
29. א. $\sqrt{2}\text{cis}45^\circ$. ב. $2\text{cis}330^\circ$. ג. $\text{cis}240^\circ$. ד. $5\text{cis}53.13^\circ$. ה. $6\text{cis}90^\circ$. ו. $\text{cis}270^\circ$. ז. $4\text{cis}0^\circ$. ח. $\text{cis}180^\circ$. ט. $\text{cis}0^\circ$. י. 0
30. א. -6 . ב. $5\text{cis}170^\circ$. ג. $4\text{cis}225^\circ$. ד. $\frac{1}{2}\text{cis}(-40^\circ)$. ה. $4\text{cis}30^\circ$
31. א. $R\text{cis}(-\theta)$. ב. $\frac{1}{R}\text{cis}(-\theta)$. ג. $R\text{cis}(180^\circ + \theta)$. ד. $\frac{1}{R}\text{cis}(180^\circ + \theta)$. ה. $R\text{cis}(90^\circ + \theta)$. ו. R^2
32. שאלת הוכחה.
33. שאלת הוכחה.
34. שאלת הוכחה.
35. $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$
36. $-\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$
37. $1+\sqrt{3}i, 1-\sqrt{3}i, -2$
38. $1+\sqrt{3}i, -1+\sqrt{3}i, 2$
39. א. מחוץ למעגל . ב. בתוך המעגל . ג. על המעגל . ד. מחוץ למעגל.
40. א. $8i$. ב. $32\text{cis}70^\circ$. ג. -4 . ד. $-8i$. ה. 1
41. א. $z_0 = 6\text{cis}60^\circ, z_1 = 6\text{cis}240^\circ$. ב. $z_0 = 3\text{cis}40^\circ, z_1 = 3\text{cis}130^\circ, z_2 = 3\text{cis}220^\circ, z_3 = 3\text{cis}310^\circ$. ג. $z_0 = \text{cis}12^\circ, z_1 = \text{cis}84^\circ, z_2 = \text{cis}156^\circ, z_3 = \text{cis}228^\circ, z_4 = \text{cis}300^\circ$
42. סכום: 0 , מכפלה: -1
43. $x^2 + y^2 = 4$
44. $x^2 + (y-3)^2 = 25$
45. $\frac{2x^2}{3} + \frac{2y^2}{5} = 1$
46. $S_{10} = 100 - 15i$
47. א. $a_1 = 2 + i, q = -2i$. ב. $S_5 = 20 + 25i$

. $2, 4-2i, 6-8i$ או $2, 2i, -2$ (48)

. $z_1 = 3-4i, z_2 = -3-4i$ (49)

. $x = 2, -1$ (50)

. $z_1 = 0, z_2 = i, z_3 = -i, z_4 = 1, z_5 = -1$ (51)

שאלת הוכחה. (52)

שאלת הוכחה. (53)

שאלת הוכחה. (54)

שאלת הוכחה. (55)

. $\arg(z) = 30^\circ$ (56)

. $z + iz = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ (57)

. 2θ (58)