תוכן העניינים:

פרק 16

זהויות טריגונומטריות

זהויות היסוד:

קשרים בין פונקציות	$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$
זוויות משלימות ל- $90°$	$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$	$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha)$
	$\cot\alpha=\tan(90°-\alpha)$	$\tan\alpha=\cot(90°-\alpha)$
קשרים בין פונקציות	$\cot^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$	$\tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

שאלות:

1) הוכח את הזהויות הבאות תוך שימוש בזהויות היסוד:

א. $\tan\alpha\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

ב. $\frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$

ג. $\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\tan\alpha$

ד. $\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=1+\cos^2\alpha$

ה. $\frac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$

ו. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$

ז. $\frac{\cos(90°-\alpha)}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

ח. $\sin^2(\alpha+45°)+\sin^2(45°-\alpha)=1$

ט. $\sqrt{1+\tan^2\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\tan\alpha$

י. $\frac{\sin\alpha(1-\cos^2\alpha)}{\cos^3\alpha}=\tan^3\alpha$

יא. $\frac{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha}=\cot\alpha$

יב. $\cos^2\alpha(1+\tan^2\alpha)=1$

יג. $\frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\cot\alpha$

יד. $\frac{\sin^3\alpha}{\sin(90°-\alpha)-\cos^3\alpha}=\tan\alpha$

טו. $\tan^2\alpha-\sin^2\alpha=\tan^2\alpha\sin^2\alpha$

טז. $\frac{1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha$

ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות מיוחדות:

	$\alpha=0°$	$\alpha=30°$	$\alpha=45°$	$\alpha=60°$	$\alpha=90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ϕ
$\cot\alpha$	ϕ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

הערות:

- ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור זוויות של $0°$ ו- $90°$ תִּלמדנהּ בהמשך אך ניתנו כעת כדי להשלים את תמונת ערכי הזוויות.
- ניתן לזכור את הטבלה ע"י כתיבה של שורת הסינוס לפי: $\frac{\sqrt{4}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{1}}{2},\frac{\sqrt{0}}{2}$ אשר נותנים את הערכים של השורה הראשונה לאחר פישוט קל. עבור שורת ה- $\cos\alpha$ יש להפוך את הערכים ולבסוף יש לחלק כל זוג ביטויים כדי לכתוב את ערכי $\tan\alpha$ ולסובב עבור ערכי $\cot\alpha$.

תרגילים:

2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בערכי הפונקציות הטריגונומטריות של זוויות מיוחדות:

א. $\sin 30° + \cos 30°$

ב. $\dfrac{\sin 30° \cdot \cos 30°}{\sin 60°}$

ג. $\tan 45° + \dfrac{\sin 45°}{\cos 45°}$

ד. $\dfrac{1+\cos 60°}{2\sin 60°}$

ה. $\cos^2 45° + \sin^2 30°$

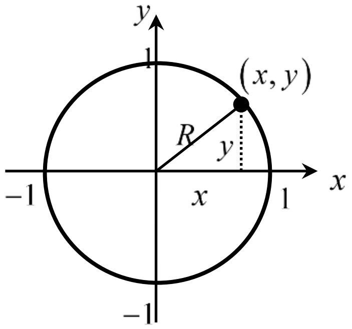
ו. $\dfrac{\tan^2 60° \cdot \cos^2 30°}{\cos^2 60°}$

ז. $\dfrac{\tan 30° \cdot \cot 60° - \cot 45° \cdot \tan 45°}{4\left(\sin^2 60° - \frac{1}{4}\right)}$

ח. $\dfrac{27\cot^4 60°}{\sin 30° \cdot \cos 45° \cdot \tan 60°}$

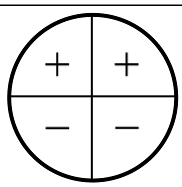
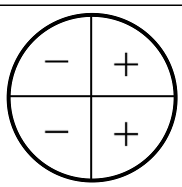
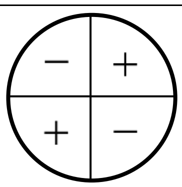
מעגל היחידה – הגדרה וזהויות:

הגדרת מעגל היחידה:



- מעגל קנוני שרדיוסו 1 מוגדר להיות המעגל הטריגונומטרי.
- הנקודות $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ מתאימות לזוויות של $0°$, $90°$, $180°$, $270°$.

הזהויות של המעגל הטריגונומטרי:

רביע	סינוס	קוסינוס	טנגנס
II III VI	$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ $\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha$ $\sin(-a)=-\sin\alpha$	$\cos(180^o-\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(180^o+\alpha)=-\cos\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$	$\tan(180^o-\alpha)=-\tan\alpha$ $\tan(180^o+\alpha)=\tan\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$
סימנים			

זהויות עבור זווית הגדולות מ-360 מעלות:

ניתן להוסיף או להוריד 'סיבובים' שלמים לזווית לפי:

$$\begin{array}{|l|}\hline \tan(\alpha+180°k)=\tan\alpha \\ \cot(\alpha+180°k)=\cot\alpha \\ \hline\end{array} \quad , \quad \begin{array}{|l|}\hline \sin(\alpha+360°k)=\sin\alpha \\ \cos(\alpha+360°k)=\cos\alpha \\ \hline\end{array}$$

כאשר k הוא מספר שלם מציין את מספר הסיבובים.

שאלות:

3) העבר את הביטויים הבאים לביטויים עם זווית ברביע הראשון.
אין צורך לחשב את ערך הביטוי:

א. $\sin 120°$ ב. $\cos 150°$

ג. $\tan 160°$ ד. $\cot 130°$

ה. $\sin 215°$ ו. $\cos 245°$

ז. $\tan 230°$ ח. $\cot 200°$

ט. $\sin 300°$ י. $\cos 310°$

4) חשב את ערכי הביטויים הבאים ע"י שימוש בזהויות המעגל הטריגונומטרי:

א. $\sin 150°$ ב. $\cos 210°$ ג. $\tan 120°$

ד. $\sin 330°$ ה. $\tan 225°$ ו. $\sin 315°$

ז. $\cos 120°$ ח. $\tan(-30°)$ ט. $\cos(-45°)$

י. $\sin 510°$ יא. $\cos 930°$ יב. $\tan(-225°)$

5) חשב את ערכי הביטויים הבאים ללא שימוש במחשבון:

א. $\left(\sin 240°\cdot\tan 150°+\cos(-60°)\right)^2$.

ב. $8\sin^2 150°\cdot\tan 135°-2\cdot\sin 135°\cdot\cos(-135°)$.

ג. $\dfrac{\cot 225°}{\sin(-225°)-\cos 135°}+\tan^2 210°$.

סכום והפרש זוויות:

סכום והפרש עבור $\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$ יחושב לפי:

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\sin\beta\cos\alpha\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}\,.$$

סכום והפרש עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\\ \cot(\alpha\pm\beta)&=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}\end{aligned}}\,.$$

הערה:

- בסרטון התיאוריה ובשאלות הבאות אין התייחסות לזהויות עבור $\tan(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cot(\alpha\pm\beta)$ היות והן לא כלולות בחומר הלימוד התיכוני.

שאלות:

6) חשב את ערכי הביטויים הבאים תוך שימוש בזהויות של סכום והפרש זוויות וללא שימוש במחשבון:

א. $\sin 75^\circ$ ב. $\sin 15^\circ$ ג. $\sin 105^\circ$

ד. $\sin(-15^\circ)$ ה. $\cos 75^\circ$ ו. $\cos 15^\circ$

ז. $\cos(-105^\circ)$ ח. $\cos 165^\circ$ ט. $\cos(-195^\circ)$

7) חשב ללא שימוש במחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 65^\circ\cos 25^\circ+\sin 25^\circ\cos 65^\circ$.

ב. $5\cos 50^\circ\cos 20^\circ+5\sin 50^\circ\sin 20^\circ$.

8) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $\sin\left(60^\circ+\alpha\right)+\sin\left(60^\circ-\alpha\right)=\sqrt{3}\cos\alpha$.

ב. $\cos\left(45^\circ-\alpha\right)-\cos\left(45^\circ+\alpha\right)=\sqrt{2}\sin\alpha$.

ג. $\sin\left(\alpha+\beta\right)\cdot\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

ד. $\tan\alpha-\tan\beta=\dfrac{\sin\left(\alpha-\beta\right)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

9) נתון: $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$ ו- α,β זוויות חדות.

מבלי למצוא את הערכים של α ו- β חשב:

א. $\sin\left(\alpha+\beta\right)$.

ב. $\cos\left(\alpha+\beta\right)$.

ג. $\tan\left(\alpha+\beta\right)$.

זווית כפולה:

נפתח זווית כפולה לפי הצורות הבאות:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\end{array}}$$

שאלות:

10) הוכח את הזהויות הבאות:

א. $4\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha=\sin 4\alpha$

ב. $\left(\sin\alpha-\cos\alpha\right)^2=1-\sin 2\alpha$

ג. $\left(\sin 3\alpha-\cos 3\alpha\right)^2=1-\sin 6\alpha$

ד. $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\cos 2\alpha$

ה. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\cot 2\alpha$

ו. $\dfrac{\cos 2\alpha-2\sin^2\alpha\cos 2\alpha}{\sin 4\alpha}=\dfrac{1}{2}\cot 2\alpha$

ז. $\cos^2 2\alpha=4\sin^4\alpha-4\sin^2\alpha+1$

ח. $\cos 4\alpha=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$

11) הוכח את הזהות: $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\sin 3\alpha$ לפי: $\sin(\alpha + 2\alpha)$ ושימוש בזהויות שנלמדו.

12) הוכח את הזהות: $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$ ע"י כתיבה של $\cos 3\alpha$ לפי: $\cos(\alpha + 2\alpha)$ ושימשו בזהויות שנלמדו.

13) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\sin\alpha = \frac{40}{41}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\cos\alpha$.

ב. $\tan\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

ה. $\tan 2\alpha$.

14) נתונה זווית חדה α המקיימת: $\tan\alpha = \frac{5}{12}$. מבלי להיעזר במחשבון חשב:

א. $\sin\alpha$.

ב. $\cos\alpha$.

ג. $\sin 2\alpha$.

ד. $\cos 2\alpha$.

15) נתונה זווית α ברביע הראשון וזווית β ברביע השני המקיימות: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ ו- $\cos\beta = -0.8$. מבלי למצוא את α ו- β חשב את הביטויים הבאים:

א. $\sin(\alpha + \beta)$.

ב. $\cos(\alpha + \beta)$.

ג. $\sin(2\alpha + \beta)$.

16) נתון כי $\sin\alpha + \cos\alpha = 1.2$ עבור $0° < \alpha < 90°$. חשב את $\sin 2\alpha$.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.

2) א. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ב. $\frac{1}{2}$ ג. 2 ד. $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ ה. $\frac{3}{4}$

ו. 9 ז. $-\frac{1}{3}$ ח. $2\sqrt{6}$

3) א. $\sin 60°$ ב. $-\cos 30°$ ג. $-\tan 20°$ ד. $-\cot 50°$

ה. $-\sin 35°$ ו. $-\cos 65°$ ז. $\tan 50°$ ח. $\cot 20°$

ט. $-\sin 60°$ י. $\cos 50°$.

4) א. $\frac{1}{2}$ ב. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ג. $-\sqrt{3}$ ד. $-\frac{1}{2}$

ה. 1 ו. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ז. $-\frac{1}{2}$ ח. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

ט. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ י. $\frac{1}{2}$ יא. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ יב. -1

5) א. 1 ב. -1 ג. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$

6) א. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ב. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ג. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ד. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

ה. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ו. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ז. $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ח. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

ט. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

7) א. 1 ב. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

8) שאלת הוכחה.

9) א. $\frac{84}{85}$ ב. $-\frac{13}{85}$ ג. $-6\frac{6}{13}$

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) א. $\frac{9}{41}$ ב. $4\frac{4}{9}$ ג. $\frac{720}{1681}$ ד. $-\frac{1519}{1681}$
ה. $-\frac{720}{1519}$

14) א. $\frac{5}{13}$ ב. $\frac{12}{13}$ ג. $\frac{120}{169}$ ד. $\frac{119}{169}$

15) א. $\frac{16}{65}$ ב. $-\frac{63}{65}$ ג. $-\frac{123}{845}$

16) 0.44.

תרגול נוסף:

שאלות יסודיות עם פונקציות טריגונומטריות:

1) קבע עבור כל אחד מהביטויים הבאים (ללא מחשבון) האם הוא חיובי או שלילי:

א. $\sin 70^\circ$ ב. $\cos 80^\circ$ ג. $\sin 140^\circ$

ד. $\sin 160^\circ$ ה. $\sin 240^\circ$ ו. $\cos 260^\circ$

ז. $\sin 310^\circ$ ח. $\cos 340^\circ$ ט. $\sin(-30^\circ)$

י. $\cos(-100^\circ)$ יא. $\sin(-210^\circ)$ יב. $\cos(-320^\circ)$

יג. $\sin 400^\circ$ יד. $\cos 480^\circ$ טו. $\sin 610^\circ$

טז. $\cos 700^\circ$ יז. $\sin(-420^\circ)$ יח. $\cos(-1080^\circ)$

2) נתון ש- $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.
קבעו לגבי כל אחד מהבאים האם הוא חיובי או שלילי:

א. $\sin\alpha$ ב. $\cos\alpha$ ג. $\tan\alpha$

3) מצא באמצעות מעגל היחידה על ערכי הביטויים הבאים:

א. $\sin 0^\circ$ ב. $\cos 0^\circ$ ג. $\sin 90^\circ$

ד. $\cos 90^\circ$ ה. $\sin 180^\circ$ ו. $\cos 180^\circ$

ז. $\sin 270^\circ$ ח. $\cos 270^\circ$ ט. $\sin 360^\circ$

י. $\cos 360^\circ$ יא. $\sin(-90^\circ)$ יב. $\cos(-90^\circ)$

יג. $\sin(-180^\circ)$ יד. $\cos(-180^\circ)$ טו. $\cos(-270^\circ)$

טז. $\sin(-360^\circ)$ יז. $\sin 540^\circ$ יח. $\cos 630^\circ$

יט. $\cos 720^\circ$ כ. $\sin 900^\circ$ כא. $\sin 1350^\circ$

כב. $\cos(-450^\circ)$ כג. $\sin(-810^\circ)$ כד. $\cos(-1260^\circ)$

4) ענה על השאלות הבאות:

א. האם יש זווית α המקיימת $\sin\alpha = 1.5$? אם כן, מצאו אותה. אם לא נמקו.

ב. האם יש זווית α המקיימת $\cos\alpha = -2$? אם כן, מצאו אותה. אם לא נמקו.

5) הסבר מדוע $\tan(90°)$ איננו מוגדר.

6) נתון ש- k הוא מספר שלם. חשב ללא עזרת מחשבון את:

א. $\sin(90°+360°k)$

ב. $\cos(180°+360°k)$

7) נתון $\cos(50°)=t$. הבע על ידי t את:

א. $\cos(130°)$

ב. $\sin(40°)$

ג. $\cos(-50°)$

ד. $\cos(410°)$

ה. $\cos(3650°)$

ו. $\cos(-310°)$

ז. $\cos(-670°)$

ח. $\cos(50°+360°k)$ כאשר ידוע ש- k מספר שלם.

8) נתון $\sin(20°)=t$. הבע על ידי t את:

א. $\sin(160°)$

ב. $\cos(70°)$

ג. $\sin(-20°)$

ד. $\sin(380°)$

ה. $\sin(3620°)$

ו. $\sin(-340°)$

ז. $\sin(-700°)$

ח. $\sin(20°+360°k)$ כאשר ידוע ש- k מספר שלם.

9) השלם את החסר:

א. $\sin(x+45°)=\sin\_\cos\_+\sin\_\cos\_$

ב. $\sin(30°-x)=\sin\_\cos\_-\sin\_\cos\_$

ג. $\cos(60°+x)=\cos\_\cos\_-\sin\_\sin\_$

ד. $\cos(45°-x)=\cos\_\cos\_+\sin\_\sin\_$

ה. $\tan x=\dfrac{\sin\_}{\cos\_}$

ו. $\tan\_=\dfrac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$

ז. $\cos^2\_+\sin^2(x)=1$

ח. $\cos^2(2x)=1-\sin^2\_$

ט. $\sin^2 \_ = 1-\cos^2(3x)$

י. $\cos(90°-3x) = \sin \_$

יא. $\sin(90°-\_) = \cos(2x)$

יב. $\sin(180°-x) = \sin \_$

יג. $\cos(180°-\_) = -\cos(3x)$

יד. $\sin(6x) = 2\sin \_ \cos \_$

טו. $\sin \_ = 2\sin(2x)\cos(2x)$

טז. $\cos(4x) = 1-2\sin^2 \_$

יז. $\cos \_ = 1-2\sin^2(3x)$

יח. $\cos(2x) = 2\cos^2 \_ -1$

יט. $\cos \_ = 2\cos^2\left(\frac{1}{2x}\right)-1$

10) הוכיחו בעזרת 4 הנוסחאות הבאות:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

את הזהויות הטריגונומטריות הבאות:

א. $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

ב. $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

ג. $\sin(90-\alpha) = \cos(\alpha)$

ד. $\cos(90-\alpha) = \sin(\alpha)$

ה. $\sin(180-\alpha) = \sin(\alpha)$

ו. $\cos(180-\alpha) = -\cos(\alpha)$

תשובות סופיות:

1) חיובי: א, ב, ג, ד, ח, יא, יב, יג, טז, יח. שלילי: ה, ו, ז, ט, י, יד, טו, יז.

2) א. שלילי. ב. שלילי. ג. חיובי.

3)

א. 0	ב. 1	ג. 1	ד. 0	ה. 0	ו. ‎-1
ז. ‎-1	ח. 0	ט. 0	י. 1	יא. ‎-1	יב. 0
יג. 0	יד. ‎-1	טו. 0	טז. 0	יז. 0	יח. 0
יט. 1	כ. 0	כא. ‎-1	כב. 0	כג. ‎-1	כד. ‎-1.

4) א. אין פתרון כי $-1 \le \sin\alpha \le 1$ ב. אין פתרון כי $-1 \le \cos\alpha \le 1$.

5) חלוקה ב-0 איננה מוגדרת.

6) א. 1 ב. ‎-1.

7) א. $-t$ ב. t ג. t ד. t ה. t
ו. t ז. t ח. t.

8) א. t ב. t ג. $-t$ ד. t ה. t
ו. t ז. t ח. t .

9) השלמה בגוף השאלה.

10) שאלת הוכחה.