

תוכן העניינים:

2	פרק 21
2	חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש
2	סיכום עיקרי הדברים :
2	סעיפי חקירה מלאה של פונקציה :
2	תחום הגדרה של פונקציה :
2	אסימפטוטות :
4	תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול :
5	שאלות :
5	מצאית תחום הגדרה :
6	מצאית נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה :
6	מצאית אסימפטוטות המקבילות לצירים :
8	חקירת פונקצית מנה :
13	חקירת פונקצית שורש :
17	שאלות עם תחומי קעירות ונקודות פיתול :
20	תשובות סופיות :
28	חקירת פונקציה עם פרמטר :
28	שאלות :
30	תשובות סופיות :
31	תרגול נוסף :
31	פונקציה רציונאלית - שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות :
31	פונקציה רציונאלית - שאלות שונות עם משיקים :
33	פונקציה רציונאלית - שאלות עם פרמטרים :
35	פונקציה רציונאלית - שאלות מסכמות בשימושי הנגזרת :
36	פונקציה רציונאלית - שאלות העוסקות בחקירת פונקציה :
39	תשובות סופיות :
43	פונקצית שורש - שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות :
43	פונקצית שורש - שאלות העוסקות במציאת תחום ההגדרה :
45	פונקצית שורש - שאלות שונות עם משיקים :
51	פונקצית שורש - שאלות עם פרמטרים :
54	פונקצית שורש - שאלות מסכמות בשימושי הנגזרת :
56	פונקצית שורש - שאלות העוסקות בחקירת פונקציה :
64	תשובות סופיות :

פרק 21

חשבון דיפרנציאלי - חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש

סיכום עיקרי הדברים:

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

- תחום הגדרה.
- נקודות קיצון.
- תחומי עלייה וירידה.
- נקודות חיתוך עם הצירים.
- אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- שרטוט.

תחום הגדרה של פונקציה:

- כל פולינום מוגדר לכל x .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש זוגי, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטות:

אסימפטוטה אנכית:

הגדרה: הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית של פונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם הוא מקיים: $g(k) = 0$ וגם: $f(k) \neq 0$. בצורה מתמטית: אם: $\lim_{x \rightarrow k^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$

או: $\lim_{x \rightarrow k^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ או שניהם אז הישר: $x = k$ הוא אסימפטוטה אנכית לפונקציה $y = \frac{f(x)}{g(x)}$.

הסבר כללי:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצומצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

אסימפטוטה אופקית:

הגדרה: יש מהצורה: $y = n$ הוא אסימפטוטה אופקית לפונקציה מהצורה: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \infty^+} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או $\lim_{x \rightarrow \infty^-} \frac{f(x)}{g(x)} = n$ או שניהם.

אופן החישוב הכללי:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.
- אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

חוקי גבולות לאינסוף:

במקרים רבים נרצה לדעת האם פונקציה מסוימת מתכנסת לערך כלשהו כאשר x שואף לערכים ההולכים וגדלים (לאינסוף, או למינוס אינסוף). עבור ערכי x שהולכים וגדלים (או קטנים) נרשום: $x = \infty$ או $x = -\infty$ בהתאמה.

ישנם 4 מצבים בהם ערך הפונקציה בשאיפת x לאחד הקצוות ניתן לחישוב ישיר:

• הגבול: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$

• הגבול: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ניתן לפיצול לשני מקרים:

• אם: $x \rightarrow 0^+$ (מתקרב ל-0 מהכיוון החיובי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

• אם: $x \rightarrow 0^-$ (מתקרב ל-0 מהכיוון השלילי) אז: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

• הגבול מהצורה $\infty \cdot \infty$ (מכפלת שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty \cdot \infty = \infty$

• הגבול מהצורה $\infty + \infty$ (סכום שני ביטויים של x אשר כל אחד מהם שואף לאינסוף בפני עצמו) מקיים: $\infty + \infty = \infty$

ישנם 3 מקרים בהם לא ניתן לדעת מהו ערך הפונקציה בלקיחת הגבול בצורה ישירה והם:

• הגבול מהצורה: $\frac{\infty}{\infty}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x).

• הגבול מהצורה: $\frac{0}{0}$ (מנת שני ביטויים שהולכים וקטנים עם שאיפת x).

• הגבול מהצורה: $\infty - \infty$ (הפרש של שני ביטויים שהולכים וגדלים עם שאיפת x). במקרים אלו נעזר בפישוטים שהוצגו לעיל על מנת למצוא את ערך הגבול עצמו.

תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול:

תחומי קעירות – הגדרה:

• פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מטה (קמורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מעל לגרף הפונקציה.

כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מטה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) < 0$.

• פונקציה $f(x)$ קעורה כלפי מעלה (קעורה) בתחום $[x_0, x_1]$ אם לכל x בתחום הנ"ל המשיק לפונקציה נמצא מתחת לגרף הפונקציה.

כדי למצוא תחומי קעירות כלפי מעלה יש למצוא תחום שבו: $f''(x) > 0$.

נקודת פיתול – הגדרות:

- נקודת פיתול היא נקודה שבה הפונקציה עוברת מתחום קעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה ולהיפך.
- נקודת פיתול מקיימת: $f''(x) = 0$ כאשר ערך הנגזרת השנייה משנה את סימנו בתחום שלפני ואחרי הנקודה המאפסת אותו.
- בנקודת פיתול המשיק לגרף הפונקציה חותך אותה ולא רק משיק לה מכיוון אחד.

שאלות:

מציאת תחום הגדרה:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x$	ב. $f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1$
ג. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1$	ד. $f(x) = \frac{2x}{x-3}$
ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$	ו. $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$
ז. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - x - 2}$	ח. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8}$
ט. $f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$	י. $f(x) = \frac{4x + 1}{x^2 + 1}$
יא. $f(x) = \frac{1}{x^3 - x}$	יב. $f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x}$

(2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

<p>ב. $f(x) = 2\sqrt{x-3}$</p> <p>ד. $f(x) = 3x\sqrt{1-2x}$</p> <p>ו. $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$</p> <p>ח. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$</p> <p>י. $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$</p> <p>יב. $f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$</p> <p>יד. $f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3}$</p>	<p>א. $f(x) = \sqrt{x}$</p> <p>ג. $f(x) = \sqrt{x-4}$</p> <p>ה. $f(x) = \sqrt{x^2+3x-10}$</p> <p>ז. $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$</p> <p>ט. $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}}$</p> <p>יא. $f(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$</p> <p>יג. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1- x }}$</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

מציאת נקודות קיצון ותחומי עלייה וירידה :

(3) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{6x}{x^2-10x+9}$

- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים :

(4) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$

(5) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$

(6) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$

(7) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$

(8) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{6x^3-5x+1}{1+2x^2}$

(9) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$.

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$ ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$ ואת נקודת אי הרציפות שלה.

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$.

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$.

(14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

(15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$.

(16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$.

(17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$.

(18) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$.

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(2, 16)$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

חקירת פונקצית מנה:

הערה: השאלה הבאה הינה שאלה מסכמת המדגימה כיצד לחקור פונקצית מנה:

(20) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(21) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{4x}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. קביעת סוג הקיצון ותחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטה אנכית.
- ו. שרטוט סקיצה.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

27 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

28 לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה $x = -8$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

29 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3x^2}{2x^2 - 8}$.

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קבע את סוג הקיצון ותחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה.
- ה. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

30 נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x - 4}{2x^2 - 1}$, $(a$ קבוע).

- ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ הוא: $m = 4$.
- א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור a .
 - ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

31 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 1.5x - \frac{5x+1}{x+5}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון וסוגן.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. חיתוך עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה.

32 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $(a \neq 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
 - ii. ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x=a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$. מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

33 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x-2}$, $(a$ פרמטר).

- ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .
- א. מצא את הערך של a .
 - ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 - i. את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 - iii. את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - iv. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
 - ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?
 - ד. נתון הישר: $y=k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

34 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x+3}{x-2} + A$, (A פרמטר). גרף הפונקציה עובר בנקודה (3A,A).

- א. מצא את ערך הפרמטר A.
 - ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x .
 - ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. נתון הישר: $y = k$.
- האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות? נמק.

35 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$

- ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטוטה האופקית שלו בנקודה (0.5,3).
- א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה ואת תחום הגדרתה.
 - ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

36 ענה על הסעיפים הבאים:

- א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9-x^2}{x^2-k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y .
- ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. מצא את האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר $y = -1$. נמק את תשובתך.

חקירת פונקצית שורש :

(37) נתונה הפונקציה : $f(x) = \sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(38) נתונה הפונקציה : $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(39) נתונה הפונקציה : $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(40) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

41 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

42 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות קיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

43 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

44 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה שהמשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
- ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x} - 6}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ד. כתוב את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$, פרמטר a .

- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y . ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y - x = 0$.
- א. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
- ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(47) נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ (k פרמטר חיובי).

- ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x = 0.8$.
- א. מצא את k .
- ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה? אם כן מצא אותה.
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 0.52$.

(48) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, פרמטר חיובי k .

- א. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (בטא באמצעות k).
 - ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?
- ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . (בטא באמצעות k).

ד. המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A. ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה-x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: 4 יח"ש $S =$. מצא את ערך הפרמטר k .

49 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$.

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.

קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה-x באותה נקודה.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה-y.

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את

שיעור ה-y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את

שיעור ה-y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

50 לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות.

הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y = x$.

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x) = (g(x))^2$.

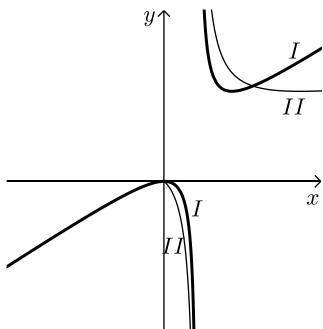
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$ זהה לשל $g(x)$?

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף

מתאר מבין הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.



51 לפניך שלוש פונקציות: $f(x) = x^2 \sqrt{k-x^2}$, $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$, $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$ ($k > 0$).

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

- i. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של $h(x)$.
- ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
- iii. הפונקציות $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).
- iv. לפונקציה $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ על ציר ה- y . ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך

של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d = 6$.

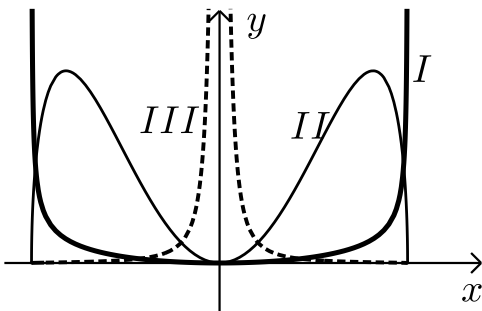
ב. מצא את k .

ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף

הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.

קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.



שאלות עם תחומי קעירות ונקודות פיתול:

52 מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$.

53 מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$.

54 מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$.

55 מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$.

(56) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2 + b}$, פרמטרים a, b .

הנקודה $(-1, 1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה.
מצא את ערכי הפרמטרים a, b .

(57) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(58) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x - \sqrt{x}}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. מציאת נקודות פיתול.
- ז. מציאת תחומי הקעירות כלפי מעלה ומטה.
- ח. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(59) חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- i. מציאת תחום הגדרה.
- ii. מציאת נקודות חיתוך עם הצירים.
- iii. מציאת נקודות קיצון וקביעת סוגן.
- iv. מציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- v. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- vi. מציאת נקודות הפיתול של הפונקציה.
- vii. מציאת תחומי הקעירות של הפונקציה.
- viii. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{ב.}$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad \text{ד.}$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad \text{ו.}$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad \text{ח.}$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad \text{ז.}$$

הערה: בסעיפים ו ו ז יש לבצע חקירה ללא סעיפים vi ו-vii.

תשובות סופיות:

(1) א. כל x ב. כל x ג. כל x ד. $x \neq 3$ ה. $x \neq \pm 2$ ו. $x \neq \pm 1$
 ז. $x \neq -1, 2$ ח. $x \neq 4, -2$ ט. כל x י. כל x יא. $x \neq \pm 1, 0$ יב. $x \neq \pm 2, 0$

(2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \geq 4$ ד. $x \leq \frac{1}{2}$ ה. $x \leq -5, x \geq 2$

ו. $x \leq -2, x \geq 1$ ז. $x > -4$ ח. $x \leq -3, -2 \leq x < 1, x > 1$ ט. $x \leq -1.5, x \geq 1$
 י. $-3 < x < 0, x > 3$ יא. $-6 \leq x < -2, x > -2$

יב. $x < 1, 1 < x \leq 2$ יג. $-1 < x < 1$ יד. $x \geq 7$

(3) א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$

ב. עולה: $-3 < x < 3$; יורדת: $x \neq 1, 3 < x \neq 9$

(4) $x = 2, y = 3$

(5) $x = \pm 3, y = 5$

(6) $y = \frac{2}{3}$

(7) $x = -3, x = 5, y = 0$

(8) אין.

(9) $x = b, y = a$

(10) נקודת אי-הגדרה: $(2, 4)$, $x = 1, y = 1$

(11) נקודת אי-הגדרה: $(0, 0)$, $x = 2, y = \frac{1}{2}$

(12) $x = 2, y = 0$

(13) $x = 4$

(14) $x = 1, y = -1$

(15) $x = 1, y = 2$

(16) $y = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = 3, y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = -3$

(17) $x = 4, x = -4, y = 5, y = -5$

(18) $b = -3, a = 2$

(19) $b = 1, a = 2$

(20) א. $x \neq 3, x \neq \frac{1}{3}$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$

ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$

ד. $(0, 2)$ ה. $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$

- (21)** א. $x \neq 0$ ב. $\min(1,2), \max(-1,-2)$ ג. עולה: $x > 1$ או $x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ ד. אין
- (22)** א. $x \neq 3$ ב. אין. ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה. ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ה. $y = 2, x = 3$.
- (23)** א. $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$ ג. תחומי עלייה: $-2 < x < 2$, $x \neq 1$, תחומי ירידה: $x < -2$ או $x > 2$, $x \neq 4$ ד. $(0,0)$ (אסימפטוטות: $y = 0, x = 1, x = 4$).
- (24)** א. כל x ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$ ג. עולה: $x > 1$ או $x < -3$, יורדת: $-3 < x < 1$ ד. $(3,0), (0,0)$ (אסימפטוטה: $y = 1$).
- (25)** א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, -0.25), \max(-1, -2.25)$ ג. עולה: $x > 1, x < -1$, יורדת: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ ד. $(0.5, 0), (2, 0)$ ה. $x = 0$.
- (26)** א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ד. $(0, -2), (2, 0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3, 1)$.
- (27)** א. $x \neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ד. $(0, -2), (2, 0)$ ה. $y = 1, x = -1$, יש נקודת אי הגדרה: $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$.
- (28)** א. $a = 1, f(x) = \frac{x+4}{x^2}$ ב. עולה: $-8 < x < 0$, יורדת: $x < -8, x > 0$ ג. $(-4, 0)$ ד. $x = 0, y = 0$.
- (29)** א. $x \neq \pm 2$ ב. $\max(0, 0)$ ג. יורדת: $x > 0, x \neq 2$, עולה: $x < 0, x \neq -2$ ד. $(0, 0)$ ה. $x = \pm 2, y = 1.5$.
- (30)** א. $a = \pm 2$ ב. $(1, 0), (0, 4)$ ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1, 0)$. נקודת החיתוך: $(1, 0)$.
- (31)** א. $x \neq -5$ ב. $\min(-1, -0.5), \max(-9, -24.5)$ ג. עולה: $x > -1, x < -9$, יורדת: $-9 < x < -1$, $x \neq -5$ ד. $(0, -0.2), \left(\frac{1}{3}, 0\right), (-2, 0)$ ה. $x = -5$.
- (32)** א. $x \neq 1$ ב. $x = 1, y = 1$ ג. $(a, 0), (0, a)$ ד. i. $a > 1$ ii. $a = 2$
- (33)** א. $a = -3$ ב. i. $x \neq 2$ ג. $x < 2$ ד. iv. $x = 2$ ii. $(0, -3)$ iii. $\max(0, -3), \min(4, 5)$ v. $-3 < k < 5$.

- 34 א. $A = -1$ ב. $x \neq 2$ ד. $(0, -2.5)$ ו. לא
- 35 א. $a = 3$, $f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6}$, כל x .
- ב. $\min\left(3, -\frac{1}{3}\right)$, $\max(-2, 8)$ ג. עולה: $x > 3$, $x < -2$, יורדת: $-2 < x < 3$
- ד. $(2, 0)$, $\left(0, 4\frac{2}{3}\right)$, $\left(4\frac{2}{3}, 0\right)$ ו. $3, -\frac{1}{3}, k = 8$
- 36 א. $k = -3$ ב. $(3, 0), (-3, 0)$ ד. $y = -1$ ה. באף נקודה.
- 37 א. $x \geq 3$ ב. $\min(3, 0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל ת.ה. ד. $(3, 0)$ ה. אין.
- 38 א. $x \geq 1$ ב. $\max(1, 0)$, $\min(2, -2)$ קצה ג. עולה: $x > 2$, יורדת: $1 < x < 2$ ד. $(1, 0), (4, 0)$ ה. אין.
- 39 א. $x \leq 6$ ב. $\min(6, 0)$, $\max(4, 4\sqrt{2})$ קצה ג. עלייה: $x < 4$, ירידה: $4 < x < 6$ ד. $(6, 0), (0, 0)$
- 40 א. $x \geq 0$ ב. $\min(0, 0)$, $\max(1, 1)$ קצה ג. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $x > 1$ ד. $(0, 0)$ ה. $y = 0$
- 41 א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3, 0)$ קצה, $\min(3, 0)$ קצה ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3, 0), (3, 0)$ ה. $x = 0$
- 42 א. $x < 0, x \geq 2$ ב. $\min(2, 0)$, $\max\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$ ג. $(2, 0)$
- 43 א. $(2, 0)$ ב. לא ג. $y = 2\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}$ ד. $S = 4\sqrt{2}$
- 44 א. $x \neq 1, x \geq 0$ ב. $(9, 6)$ ג. $y = 6$
- 45 א. $0 \leq x < 4, x > 4$ ב. הוכחה. ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$ ד. $y = 0, x = 4$
- 46 א. $a = 1$ ב. $-3 < x < 3$ ג. $(-1.5, \sqrt{3})$ ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$, עולה: $-1.5 < x < 3$
- 47 א. $k = 0.48$ ב. כן, $(0.6, 0.57)$ ג. $y = 0.74x + 0.1352$
- 48 א. $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$ i. $x = \pm\sqrt{k}$ ii. ב. $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$ ג. $y = \sqrt{k}x$ ד. $k = 4$

49 א. $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$. ב. i. לא נכון . ii. נכון . iii. נכון . iv. נכון

ג. $f(x) : \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $g(x) : \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. ד. אסף צודק.

50 א. i. לא נכון . ii. נכון . iii. נכון . ב. $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$. ד. $I = h(x)$, $II = f(x)$. ג. לא, $h(x) : x \neq 1$.

51 א. i. לא נכון . ii. לא נכון . iii. נכון . iv. לא נכון . ב. $k = 24$. ג. $\min(0,0)$, $\max(\pm 4, 32\sqrt{2})$. ד. $I = g(x)$, $II = f(x)$, $III = h(x)$.

52 (1,7), (2,16) , קעירות כלפי מעלה : $x > 2$ או $x < 1$, קעירות כלפי מטה : $1 < x < 2$.

53 (2,1) , קעירות כלפי מעלה : $x > 2$, קעירות כלפי מטה : $0 \neq x < 2$.

54 קיצון : $\min(2,4)$, פיתול : $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$.

55 קיצון : $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$, פיתול : (1,-1), (2,0) .

56 $a = 4$, $b = 3$.

57 א. $x \neq 0$. ב. $\max\left(2, 2\frac{1}{4}\right)$. ג. עולה : $0 < x < 2$ יורדת : $x > 2$, $x < 0$.

ד. $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $(-1, 0)$. ה. $x = 0$, $y = 2$. ו. $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$.

ז. קעירות כלפי מעלה : $x > 3$, קעירות כלפי מטה : $0 \neq x < 3$.

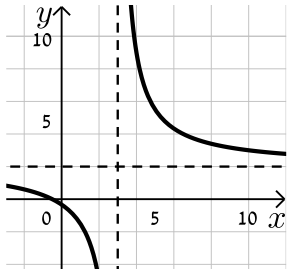
58 א. $1 \neq x > 0$. ב. אין . ג. יורדת בכל תחום הגדרתה .

ד. אין . ה. $x = 1$, $y = 2$ נקודת אי הגדרה : (0,0) . ו. $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$.

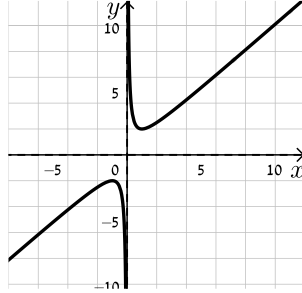
ז. קעירות כלפי מעלה : $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{9}$, קעירות כלפי מטה : $\frac{1}{9} < x < 1$.

סקיצות לשאלות החקירה:

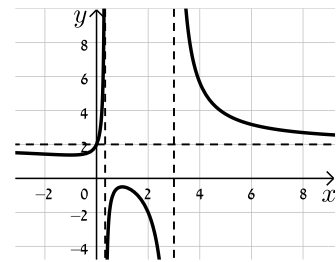
(22)



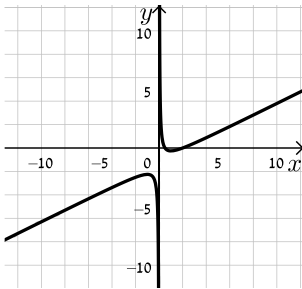
(21)



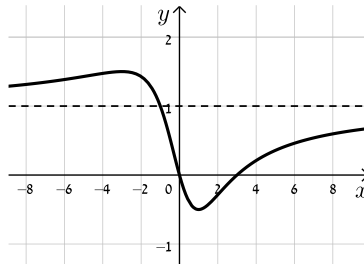
(20)



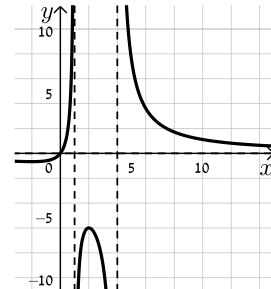
(25)



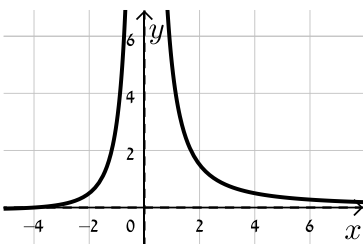
(24)



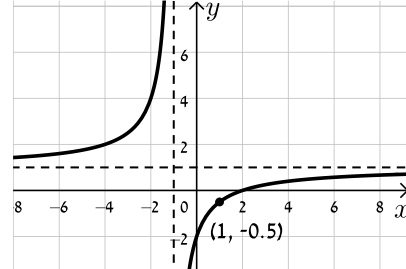
(23)



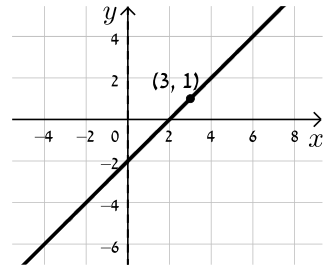
(28)



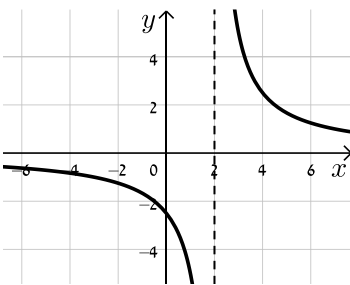
(27)



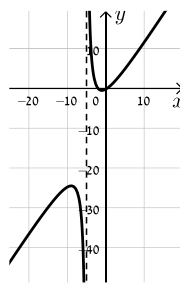
(26)



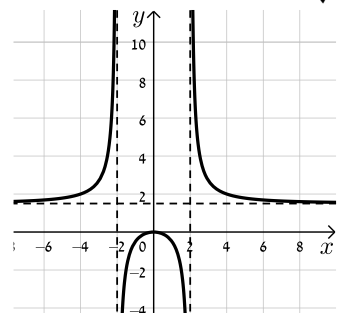
(34)



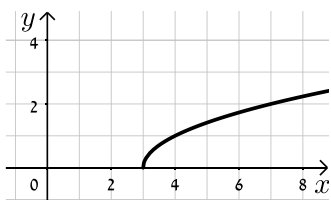
(31)



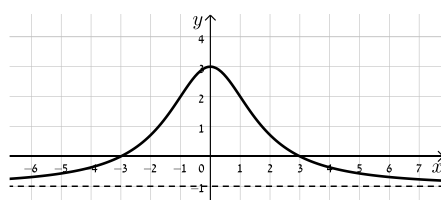
(29)



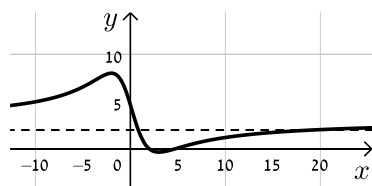
(37)

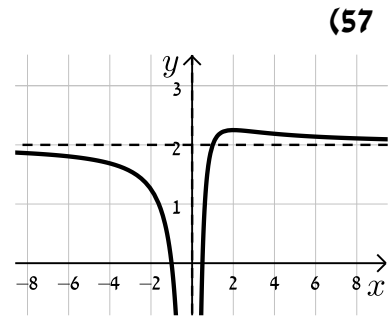
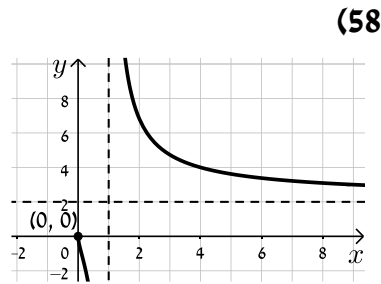
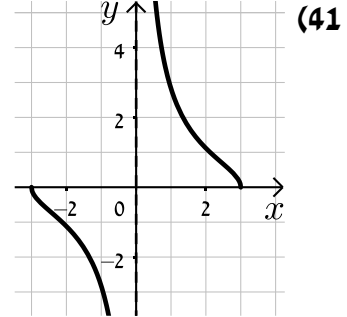
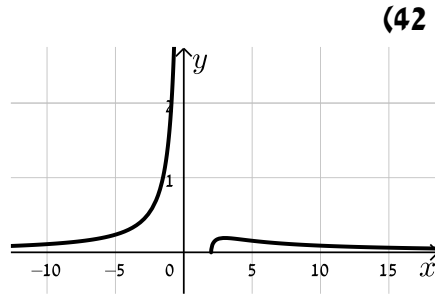
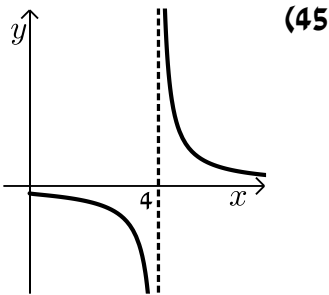
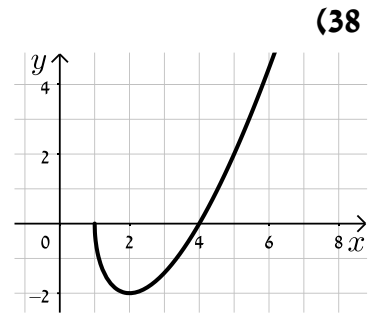
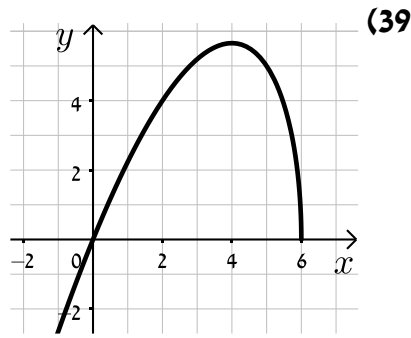
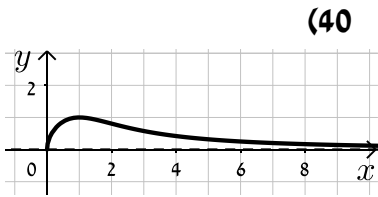


(36)



(35)





max(2, 0.25) .iv $x = 0, y = 0$.iii (1, 0) .ii $x \neq 0$.i א (59)

$\left(3, \frac{2}{9}\right)$.vi $x < 0, x > 2$: יורדת, $0 < x < 2$: עולה .v

.vii קעורה כלפי מעלה : $x > 3$, קעורה כלפי מטה : $0 < x < 3, x < 0$.

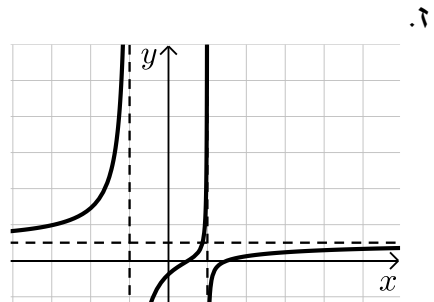
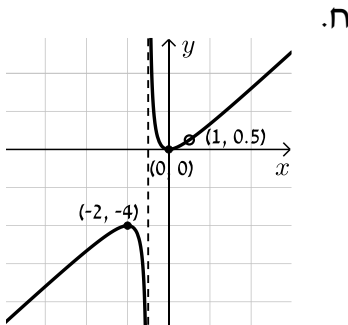
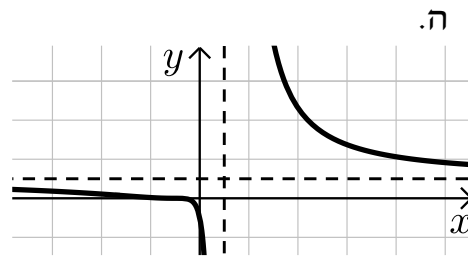
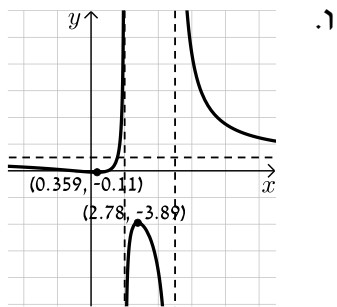
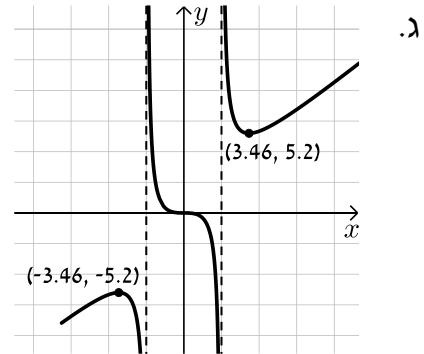
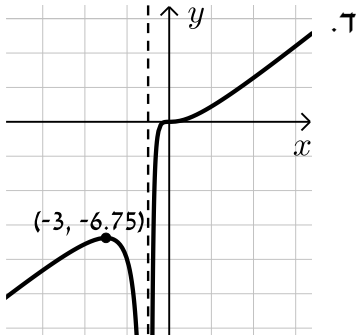
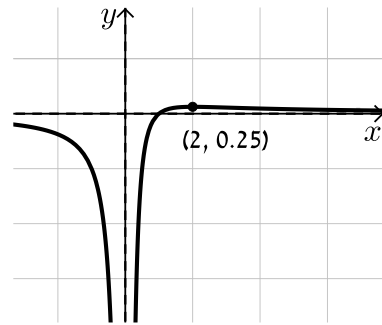
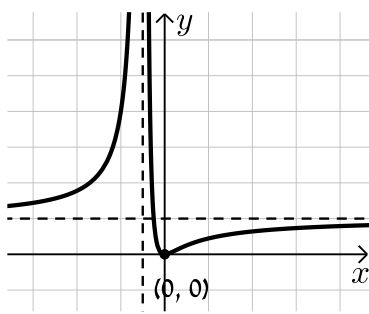
min(0, 0) .iv $x = -1, y = 2$.iii (0, 0) .ii $x \neq -1$.i ב

$\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$.vi $-1 < x < 0$: יורדת, $x > 0, x < -1$: עולה .v

.vii קעורה כלפי מעלה : $-1 < x < \frac{1}{2}, x < -1$, קעורה כלפי מטה : $x < \frac{1}{2}$.

- ג. i. $x \neq \pm 2$.ii. $(0,0)$.iii. $x = \pm 2$
- iv. $\min(\sqrt{12}, 5.2)$, $\max(-\sqrt{12}, -5.2)$
- v. עולה: $x > \sqrt{12}$, $x < -\sqrt{12}$, יורדת: $2 < x < \sqrt{12}$, $-2 < x < 2$, $-\sqrt{12} < x < -2$
- vi. $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 2$, $-2 < x < 0$, קעורה כלפי מטה: $0 < x < 2$, $x < -2$
- ד. i. $x \neq -1$.ii. $(0,0)$.iii. $x = -1$.iv. $\max(-3, -6.75)$
- v. עולה: $x > -1$, $x < -3$, יורדת: $-1 < x < -3$.vi. $(0,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > 0$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 0$, $x < -1$
- ה. i. $x \neq 1$.ii. $(-1,0), (0,-1)$.iii. $x = 1, y = 1$.iv. אין.
- v. יורדת בכל ת.ה. .vi. $(-3, \frac{1}{8}), (-1,0)$
- vii. קעורה כלפי מעלה: $-1 < x < -3$, $x > 1$, קעורה כלפי מטה: $-1 < x < 1$, $x < -3$
- ו. i. $x \neq 2, 5$.ii. $(0, -0.1), (-1, 0), (1, 0)$.iii. $x = 2, x = 5, y = 1$
- iv. $\min(0.359, -0.11)$, $\max(2.78, -3.89)$
- v. עולה: $2 < x < 2.78$, $0.359 < x < 2$, יורדת: $x > 5$, $2.78 < x < 5$, $x < 0.359$
- ז. i. $x \neq \pm 2$.ii. $(3,0), (1,0), (0,-0.75)$.iii. $x = \pm 2, y = 1$
- iv. אין. v. יורדת בכל ת.ה.
- ח. i. $x \neq \pm 1$.ii. $(0,0)$.iii. $x = -1$.iv. $\min(0,0)$, $\max(-2,-4)$
- v. עולה: $x > 0$, $x < -2$, $x \neq 1$, יורדת: $-1 < x < 0$, $-2 < x < -1$.vi. אין.
- vii. קעורה כלפי מעלה: $x > -1$, $x \neq 1$, קעורה כלפי מטה: $x < -1$

סקיצות:



חקירת פונקציה עם פרמטר:

סיווג נקודות קיצון באמצעות "y :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

- אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.
- אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^3 - 12x$.

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^2 - 6x - 16$.

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^3 - 3b^2x$, $b > 0$. פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$). חקור לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(5) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2}$, ($b > 1$). חקור לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

6 נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2}$, $(b > 0)$.

חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

7 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - m}{ax - 4}$, a, m פרמטרים קבועים כאשר: $a > 0$.

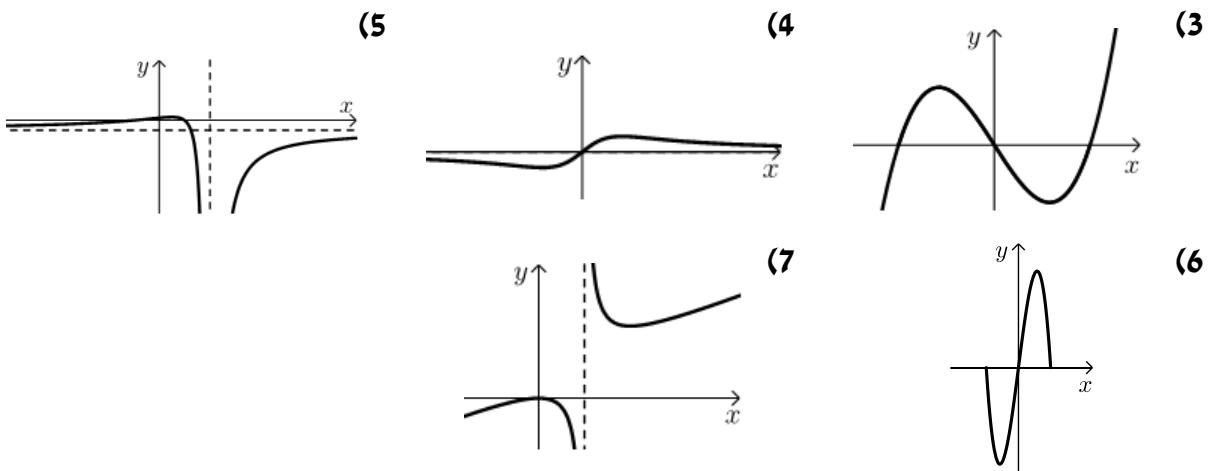
ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- א. מצא את הערך של הפרמטר m .
- ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבא באמצעות a את:
 - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 - iii. האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. שרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.
- ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y נמצאת במרחקים שווים מהצירים. מצא את הערך של הפרמטר a .
- ה. נתון הישר: $y = k$. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

- (1) $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$
- (2) $\min(3, -25)$
- (3) $\min(b, -2b^3)$, $\max(-b, 2b^3)$
- (4) א. כל x . ב. $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$. ג. עולה: $-a < x < a$ יורדת: $x < -a$, $x > a$. ד. $(0, 0)$. ה. אסימפטוטה אופקית: $y = 0$.
- (5) א. $x \neq b$. ב. $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2-1}\right)$. ג. עולה: $x > b$, $x < \frac{1}{b}$ יורדת: $\frac{1}{b} < x < b$. ד. $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(0, \frac{1}{b^2}\right)$. ה. $x = b$, $y = -1$.
- (6) א. $-b \leq x \leq b$. ב. $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right)$, $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right)$, $\min(-b, 0)$ קצה, . ג. עולה: $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$, יורדת: $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b$, $-b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$. ד. $(b, 0)$, $(-b, 0)$, $(0, 0)$.
- (7) א. $m = 0$. ב. $x \neq \frac{4}{a}$. ב. ii. $\max(0, 0)$, $\min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$. ב. iii. $x = \frac{4}{a}$. ד. $a = 2$. ה. $0 < k < 4$.

סקיצות לשאלות:



תרגול נוסף:

פונקציה רציונאלית - שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 y = \frac{x}{6} + \frac{6}{x} & \text{(3)} & y = \frac{4x-1}{x} & \text{(2)} & y = \frac{1}{x} & \text{(1)} \\
 y = \frac{(x+3)^2}{x^2} & \text{(6)} & y = \frac{x^2-3x+4}{x^2} & \text{(5)} & y = \frac{x^2+5x+4}{x} & \text{(4)} \\
 y = \frac{x+6}{x^2-6} & \text{(9)} & y = \frac{6}{x^2+8x+12} & \text{(8)} & y = \frac{3x}{2x+1} & \text{(7)} \\
 y = \frac{x^2}{(x^2+4)^2} & \text{(12)} & y = 3 + \frac{(x-9)^2}{(x+9)^2} & \text{(11)} & y = \frac{x^2-6x+8}{x^2+2x+1} & \text{(10)} \\
 & & y = \frac{x^2+7x+12}{x^4} & \text{(14)} & y = \frac{x^3+x}{x^2-1} & \text{(13)}
 \end{array}$$

פונקציה רציונאלית - שאלות שונות עם משיקים:

שאלות העוסקות במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$.

15) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

$$\begin{array}{ll}
 x=2, f(x) = \frac{x^2}{3x^2-2} & \text{ב.} \\
 x=0, f(x) = \frac{x^2+3x+5}{3x^2-x-2} & \text{ד.} \\
 x=1, f(x) = \frac{x-1}{x-2} & \text{א.} \\
 x=-2, f(x) = \frac{3x}{(x-1)^2} & \text{ג.}
 \end{array}$$

16) לפניך מספר פונקציות. מצא את הנקודות שבהן שיפוע הפונקציה הוא m :

$$\begin{array}{ll}
 m = \frac{5}{9}, f(x) = x + \frac{4}{x+1} & \text{ב.} \\
 m = 4, f(x) = x^2 + 4x - \frac{x-16}{x} & \text{ד.} \\
 m = -3, f(x) = \frac{x^2}{x-3} & \text{א.} \\
 m = \frac{1}{36}, f(x) = \frac{x}{x^2+8} & \text{ג.}
 \end{array}$$

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$, כאשר: (x_1, y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

17 מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

<p>א. $x = -1, y = \frac{x^2 + 2x}{x + 3}$</p> <p>ב. $x = 2, y = \frac{2x + 5}{x^2 + 5}$</p>	<p>ג. $x = 7, y = 3x - \frac{x + 6}{x^2 - 12x + 36}$</p> <p>ד. $x = 3, y = \frac{(x + 3)^2}{x^2}$</p>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

18 מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $y = \frac{2x + 4}{(x + 1)^2}$ העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x ואת הזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

19 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

20 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x - 2}$.

- מעבירים לגרף הפונקציה משיק בנקודה שבה $x = 3$.
- א. מצא את משוואת המשיק.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- ג. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

21 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x + 4}{2} + \frac{5}{2x}$.

- א. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x ?
- ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.
- ג. האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם? אם כן, כתוב את משוואתו.

22 נתונה הפונקציה: $y = \frac{x - 1}{x + 1}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
- ב. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

(23) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{4x+2}{2x}$, $g(x) = x^3 + 2$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
 ב. מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה העוברים דרך הנקודה הנמצאת ברביע הראשון.

שאלות העוסקות במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x-6}{x}$.

- א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה שהשיפוע שלהם הוא 6.
 ב. מצא את המרחק בין שתי נקודות החיתוך של שני המשיקים עם ציר ה- y .

(25) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ היוצרים זווית של 108.43° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ המקבילים לישר: $y + 3x = 10$.

פונקציה רציונאלית - שאלות עם פרמטרים:

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + kx - 5}{x}$.

הישר $y = 6x - 14$ משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

- א. מצא את הפרמטר k .
 ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. האם קיים עוד משיק לגרף הפונקציה המקביל למשיק זה? אם כן, מצא את משוואתו.

(27) המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + A}$ בנקודה שבה $x = 1$ מקביל לציר ה- x .

מצא את A .

(28) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2 + kx + 3}{x^2}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x=1$.

- א. מצא את הפרמטר k .
- ב. האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.
- ג. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות החיתוך עם ציר ה- x .

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{12}{9 - ax^2}$. הישר $x=3$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=0$.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{8x+4}{x^2+a}$. הישר $x=4$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה עוד אסימפטוטות?
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלו עם הישר $4y + 2x + 1 = 0$ הנמצאת על ציר ה- x .

(31) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{mx^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$.

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=3$.

- א. מצא את m .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית $y=3$.

(32) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3} + A$.

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית: $y=3$.

- א. מצא את A .
- ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם האסימפטוטה האופקית $y=3$.

33 נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2} + A$

ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית : $y = 5$.

א. מצא את A.

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

34 נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{Ax^2 + 1}{x^2 + 1} + B$

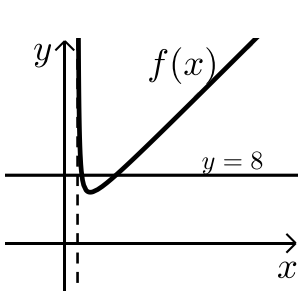
ידוע כי לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית : $y = 1$.

כמו כן, שיפוע הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 1.

א. מצא את A ואת B.

ב. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה.

פונקציה רציונאלית - שאלות מסכמות בשימושי הנגזרת:



35 באיור שלפניך נתונות הפונקציה : $f(x) = \frac{2x^2}{2x - 3}$ והישר : $y = 8$

א. מצא את נקודות החיתוך של הישר והפונקציה.

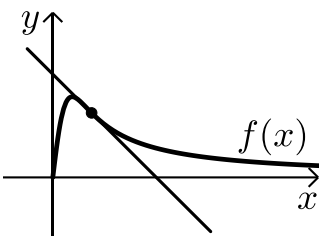
ב. כתוב את משוואות המשיקים לגרף

הפונקציה $f(x)$ העוברים דרך נקודות

החיתוך שלה עם הישר.

ג. מצא את נקודת החיתוך של שני המשיקים.

ד. חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני המשיקים לישר $y = 8$.



36 נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{10x}{x^2 + 1}$

מעבירים לפונקציה משיק בנקודה שבה $x = 2$.

חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק לצירים.

37 נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$

א. הראה כי הפונקציה עולה תמיד.

ב. מצא את משוואת המשיק המאונך לישר : $y = -9x$ העובר דרך נקודת ההשקה

הנמצאת ברביע ראשון.

38) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+3}{x}$ בנקודה שבה: $x=1$.
- ב. מצא את משוואות המשיקים לגרף הפונקציה: $g(x) = \frac{x^2-4x}{x+2}$ המקבילים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.
- ג. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $h(x) = \frac{x^2+1}{x+7}$ המאונכים למשיק שאת שיפועו מצאת בסעיף א'.

פונקציה רציונאלית - שאלות העוסקות בחקירת פונקציה:

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x} \quad (40)$$

$$y = 1 + \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} \quad (42)$$

$$y = 1 - \frac{6}{x} + \frac{8}{x^2} \quad (44)$$

$$y = \frac{3}{x^2 - 10x + 25} \quad (46)$$

$$y = \frac{6}{x^2 - 9} \quad (48)$$

$$y = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5} \quad (50)$$

$$y = -\frac{16x^2 - 3x + 4}{x} \quad (39)$$

$$y = \frac{x^2 + 10x + 25}{x} \quad (41)$$

$$y = 5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \quad (43)$$

$$y = \frac{3x}{5} - \frac{12}{5x} \quad (45)$$

$$y = \frac{4}{3x^2 - 6x - 9} \quad (47)$$

$$y = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} \quad (49)$$

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x) = \frac{(x+4)^2}{3x-5} \quad (52) \qquad f(x) = \frac{2x^2 - 8x + 8}{x^2 - 5x + 4} \quad (51)$$

(53) נתונה הפונקציה: $y = ax + \frac{9}{2x}$, a (פרמטר). ידוע כי גרף הפונקציה עובר בנקודה $(3, 7.5)$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(54) נתונה הפונקציה: $y = \frac{-9}{10 + ax - 2x^2}$.

ידוע כי יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית: $x = 5$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a .
- ב. האם יש לפונקציה עוד אסימפטוטות? אם כן, מהן?
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(55) נתונה הפונקציה: $y = \frac{a}{2x^2 + 5}$, a (פרמטר).

ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 2$.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? אם כן – מצא אותן.
- ה. כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

56 הפונקציה: $f(x) = \frac{ax-30}{x^2-6x+a}$, (a פרמטר) מוגדרת לכל x .

ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון שבה $x=2$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

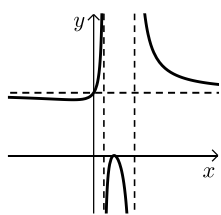
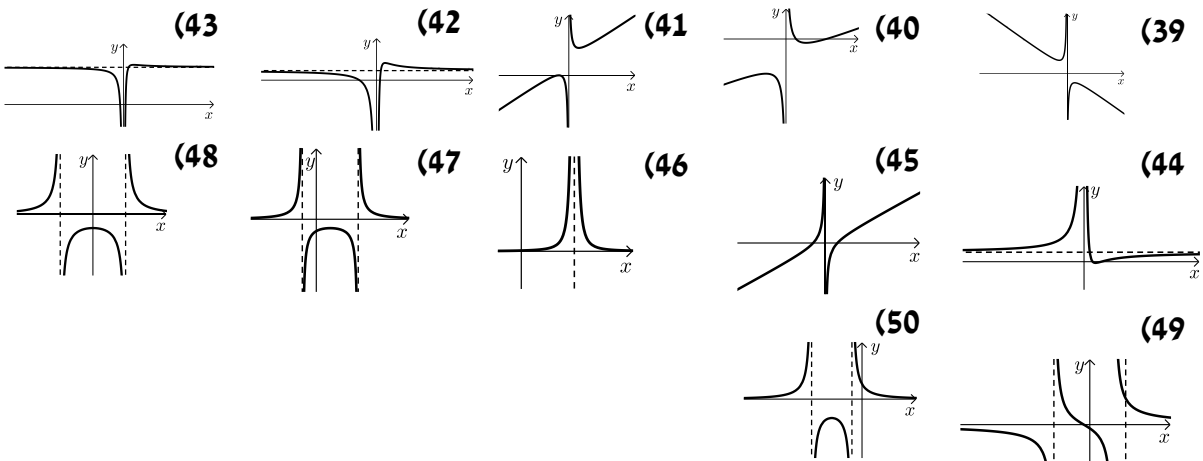
תשובות סופיות:

- (1) $y' = -\frac{1}{x^2}$
- (2) $y' = \frac{1}{x^2}$
- (3) $y' = \frac{1}{6} - \frac{6}{x^2}$
- (4) $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$
- (5) $y' = \frac{3}{x^2} - \frac{8}{x^3}$
- (6) $y' = -\frac{6}{x^2} - \frac{18}{x^3}$
- (7) $y' = \frac{3}{(2x+1)^2}$
- (8) $y' = -\frac{6(2x+8)}{(x^2+8x+12)^2}$
- (9) $y' = -\frac{x^2+12x+6}{(x^2-6)^2}$
- (10) $y' = \frac{8x^2-14x-22}{(x^2+2x+1)^2}$
- (11) $y' = \frac{36(x-9)}{(x+9)^3}$
- (12) $y' = \frac{2x(4-x^2)}{(x^2+4)^3}$
- (13) $y' = \frac{x^4-4x^2-1}{(x^2-1)^2}$
- (14) $y' = -\frac{2x^2+21x+48}{x^5}$
- (15) א. -1 ב. $-\frac{2}{25}$ ג. $-\frac{1}{9}$ ד. $-\frac{1}{4}$
- (16) א. (1.5, -1.5), (4.5, 13.5) ב. $(2, 3\frac{1}{3})$, $(-4, -5\frac{1}{3})$ ג. $(-2, -\frac{1}{6})$, $(2, \frac{1}{6})$ ד. (2, 19)
- (17) א. $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ ב. $y = -\frac{2}{9}x + 1\frac{4}{9}$ ג. $y = 28x - 188$ ד. $y = -\frac{4}{3}x + 8$
- (18) $y = 2x + 4$, 63.64°
- (19) א. (-2, 0) ב. $y = 1.5x + 3$
- (20) א. $y = 4 - x$ ב. (4, 0), (0, 4) ג. 135° ד. 8
- (21) א. לא ב. $y = -2x + 7$ ג. $y = -2x - 3$
- (22) א. $y = 2x - 1$ ב. $\frac{1}{4}$
- (23) א. (1, 3), (-1, 1) ב. $y = 4 - x$, $y = 3x$
- (24) א. $y = 6x - 8$, $y = 6x + 16$ ב. 24
- (25) א. $y = -3x + 9$, $y = -3x + 1$ ב. $y = -3x - 18$, $y = -3x - 2$
- (26) א. $k = -4$ ב. (5, 0), (-1, 0) ג. כן ד. $y = 6x + 6$
- (27) א. $A = 1$
- (28) א. $k = -5$ ב. כן ג. (1.5, 0) ד. $y = -x + 1$, $9y = 4x - 6$
- (29) א. $a = 1$ ב. כן ג. $y = 0$, $x = -3$ ד. $y = \frac{4}{3}$
- (30) א. $a = -16$ ב. $y = 0$, $x = -4$ ג. $63y + 32x + 16 = 0$
- (31) א. $m = 3$ ב. $y = 2x + 3$
- (32) א. $A = 3$ ב. $y = -0.5x + 2.5$

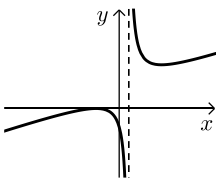
- (33) א. $A=3$
- (34) א. $A=3, B=-2$
- (35) א. $(2,8), (6,8)$ ב. $y = -8x + 24, 9y = 8x + 24$ ג. $(2.4, 4.8)$ ד. 6.4
- (36) $S = 17\frac{1}{15}$
- (37) א. לכל x מתקיים: $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$ ולכן הפונקציה עולה תמיד.
 ב. $9y = x + 5$
- (38) א. -2 ב. $y = -2x, y = -2x - 24$ ג. $y = 0.5x - 0.5, y = 0.5x - 20.5$
- (39) א. $x \neq 0$ ב. $\max(0.5, -13), \min(-0.5, 19)$
- ג. עולה: $-0.5 < x < 0.5, x \neq 0$ יורדת: $x < -0.5, x > 0.5$ ד. אין. ה. $x = 0$
- (40) א. $x \neq 0$ ב. $\max(-1, -9), \min(1, -1)$
- ג. עולה: $x < -1, x > 1$ יורדת: $-1 < x < 1, x \neq 0$ ד. $(0.5, 0), (2, 0)$ ה. $x = 0$
- (41) א. $x \neq 0$ ב. $\max(5, 20), \min(-5, 0)$
- ג. עולה: $x < -5, x > 5$ יורדת: $-5 < x < 5, x \neq 0$ ד. $(-5, 0)$ ה. $x = 0$
- (42) א. $x \neq 0$ ב. $\max(2.5, 1.8)$ ג. עולה: $0 < x < 2.5$ יורדת: $x < 0, x > 2.5$
 ד. $(-5, 0), (1, 0)$ ה. $x = 0, y = 1$
- (43) א. $x \neq 0$ ב. $\max\left(3, 5\frac{1}{3}\right)$ ג. עולה: $0 < x < 3$ יורדת: $x < 0, x > 3$
 ד. $(-1, 0), (0.6, 0)$ ה. $x = 0, y = 5$
- (44) א. $x \neq 0$ ב. $\min\left(2\frac{2}{3}, -\frac{1}{8}\right)$ ג. עולה: $x < 0, x > 2\frac{2}{3}$ יורדת: $0 < x < 2\frac{2}{3}$
 ד. $(2, 0), (4, 0)$ ה. $x = 0, y = 1$
- (45) א. $x \neq 0$ ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה.
 ד. $(-2, 0), (2, 0)$ ה. $x = 0$
- (46) א. $x \neq 5$ ב. אין נקודות קיצון. ג. עולה: $x < 5$ יורדת: $x > 5$
 ד. $(0, 0.12)$ ה. $x = 5, y = 0$
- (47) א. $x \neq -1, 3$ ב. $\max\left(1, -\frac{1}{3}\right)$ ג. עולה: $x < -1, -1 < x < 1$
- יורדת: $1 < x < 3, x > 3$ ד. חיתוך עם ציר ה- y : $\left(0, -\frac{4}{9}\right)$ ה. $x = -1, 3, y = 0$

- (48)** א. $x \neq \pm 3$ ב. $\max\left(0, -\frac{2}{3}\right)$ ג. עולה: $x < -3, -3 < x < 0$ ד. יורדת: $0 < x < 3, x > 3$ ה. $(0, -\frac{2}{3})$ ו. $x = \pm 3, y = 0$.
- (49)** א. $x \neq -3, 2$ ב. אין נקודות קיצון. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד. $(-0.5, 0), \left(0, -\frac{1}{6}\right)$ ה. $x = -3, 2, y = 0$.
- (50)** א. $x \neq -1, -5$ ב. $\max(-3, -1)$ ג. עולה: $x < -5, -5 < x < -3$ ד. $(0, 0.8)$ ה. $x = -5, -1, y = 0$ ו. יורדת: $-3 < x < -1, x > -1$.

סקיצות של שאלות 39-50:



- (51)** א. $x \neq 1, 4$ ב. $\max(2, 0), \min\left(-2, 1\frac{7}{9}\right)$ ג. עולה: $-2 < x < 1, 1 < x < 2$ ד. $(0, 2), (2, 0)$ ה. $x = 1, 4, y = 2$ ו. סקיצה: $x < -2, 2 < x < 4, x > 4$.



- (52)** א. $x \neq \frac{5}{3}$ ב. $\max(-4, 0), \min\left(7\frac{1}{3}, 7\frac{5}{9}\right)$ ג. עולה: $x < -4, x > 7\frac{1}{3}$ ד. $(0, -3.2), (-4, 0)$ ה. $x = \frac{5}{3}$ ו. סקיצה: $-4 < x < \frac{5}{3}, \frac{5}{3} < x < 7\frac{1}{3}$.

- (53)** א. $a = 2$ ב. $y = 2x + \frac{9}{2x}$ ג. עולה: $x < -1.5, x > 1.5$ ד. $\max(-1.5, -6), \min(1.5, 6)$ ה. יורדת: $-1.5 < x < 0, 0 < x < 1.5$.

- (54)** א. $a = 8$ ב. כן. $y = 0, x = -1$ ג. $\max(2, -0.5)$ ד. עולה: $x < -1, -1 < x < 2$ ה. יורדת: $2 < x < 5, x > 5$.

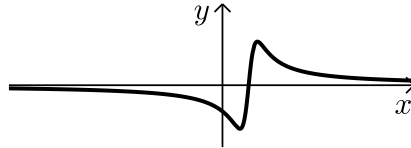
55) א. $a = 10$ ב. כל x ג. $\max(0, 2)$

ד. אין חיתוך עם ציר ה- x . ה. חיובית לכל x .

56) א. $a = 10$, $f(x) = \frac{10x - 30}{x^2 - 6x + 10}$ (הפתרון: $a = -6$ נפסל). ב. כן - $(4, 5)$.

ג. עולה: $2 < x < 4$, יורדת: $x < 2, x > 4$. ד. $(0, -3), (3, 0)$.

ה. להלן סקיצה:



פונקצית שורש – שאלות העוסקות בנגזרות יסודיות:

גזור את הפונקציות הבאות:

- | | | |
|------------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| $y = x^2 - 16\sqrt{x}$ (3) | $y = x - 3\sqrt{x}$ (2) | $y = \sqrt{x}$ (1) |
| $y = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ (6) | $y = x^2\sqrt{x}$ (5) | $y = (2x-1)\sqrt{x}$ (4) |
| $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ (9) | $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-2}$ (8) | $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-1}$ (7) |
| $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2}$ (12) | $y = (x^2+4)\sqrt{x-2}$ (11) | $y = x\sqrt{5x-2}$ (10) |
| $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ (15) | $y = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ (14) | $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$ (13) |
| $y = x\sqrt{x^4+6x^2-8}$ (18) | $y = (3x+1)^8\sqrt{x^2+x}$ (17) | $y = (x+10)^6\sqrt{x}$ (16) |
| $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ (21) | $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$ (20) | $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ (19) |

פונקצית שורש – שאלות העוסקות במציאת תחום ההגדרה:

(22) לפניך מספר פונקציות, מצא את תחום ההגדרה שלהן.

תזכורת:

- תחום הגדרה של פונקציה המכילה ביטוי עם שורש: $y = \sqrt{f(x)}$ הוא: $f(x) \geq 0$.
- תחום הגדרה של פונקציה אי-רציונאלית: $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ הוא: $g(x) \neq 0$.

- | | |
|--------------------------------|------------------------------------------|
| $y = \sqrt{x-5}$.ב | $y = \sqrt{x}$.א |
| $y = \sqrt{x^2-1}$.ד | $y = \sqrt{7-2x}$.ג |
| $y = \sqrt{x^2-4x-5}$.ו | $y = \sqrt{x^2+2x}$.ה |
| $y = \sqrt{x^3-3x^2-4x}$.ח | $y = x^2-3\sqrt{x}$.ז |
| $y = (x^2-3)\sqrt{x^2+x}$.י | $y = 2x\sqrt{2-x}$.ט |
| $y = \frac{\sqrt{x}}{x-5}$.יב | $y = \frac{4-\sqrt{x}}{x+2}$.יא |
| $y = \frac{x+6}{\sqrt{x}}$.יד | $y = \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-16}$.יג |

$$y = \frac{4}{\sqrt{x^2 - 25}} \quad \text{טו.}$$

$$y = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}} \quad \text{ית.}$$

$$y = \sqrt{\frac{25x-x^2}{x+2}} \quad \text{כ.}$$

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{3x-8}} \quad \text{טו.}$$

$$y = \frac{2x}{\sqrt{81-4x^2}} \quad \text{יז.}$$

$$y = \sqrt{\frac{x}{x^2+4}} \quad \text{יט.}$$

(23) ענה על הסעיפים הבאים :

- א. נתונה הפונקציה הבאה : $y = \sqrt{kx^2 - 18}$, (k) פרמטר).
 ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא : $x \leq -3$, $x \geq 3$. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. נתונה הפונקציה הבאה : $y = \sqrt{k-3x^2}$, (k) פרמטר).
 ידוע כי תחום ההגדרה שלה הוא : $-1 \leq x \leq 1$. מצא את ערך הפרמטר k .
- ג. נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, (k) פרמטר).
 לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית : $x = 7$. מצא את ערך הפרמטר k .
- ד. נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{6}{\sqrt{x^2+k}}$, (k) פרמטר).
 לפונקציה יש אסימפטוטות אנכיות : $x = \pm 4$. מצא את k .

- (24) נתונה הפונקציה הבאה : $y = ax + \sqrt{x-b}$, (a, b) פרמטרים).
 ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה : $(2, 2)$ וכי תחום הגדרתה הוא : $x \geq 2$.
 מצא את a ואת b .

- (25) נתונה הפונקציה הבאה : $y = ax^2 \sqrt{bx+3}$, (a, b) פרמטרים). ידוע כי הפונקציה עוברת
 בנקודה : $(1, 4)$ וכי תחום הגדרתה הוא : $x \geq -3$. מצא את a ואת b .

- (26) נתונה הפונקציה : $y = \sqrt{ax^2 + bx + 12}$, (a, b) פרמטרים).
 ידוע כי הפונקציה אינה מוגדרת בתחום : $-4 < x < -3$. מצא את a ואת b .

פונקצית שורש – שאלות שונות עם משיקים:

שאלות עוסקות במציאת שיפוע המשיק לגרף הפונקציה לפי הכלל: $f'(x_0) = m$.

(27) חשב את שיפוע המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x=1, f(x) = 3x + \sqrt{x}$ ב. $x=4, f(x) = (x+2)\sqrt{x}$

ג. $x=9, f(x) = (x^2 - 4)\sqrt{x}$ ד. $x=1, f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$

ה. $x=3, f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x}$ ו. $x=2, f(x) = x\sqrt{x^2 + 4x + 8}$

(28) לפניך מספר פונקציות.

מצא את שיעורי הנקודות שבעבורם שיפוע המשיק הוא המצוין לידה.

א. $m = 1.5, f(x) = \sqrt{3x-2}$ ב. $m = \frac{2}{5}, f(x) = \sqrt{4x-7}$

ג. $m = \frac{1}{4}, f(x) = x - \frac{1}{4}\sqrt{x}$ ד. $m = 2, f(x) = \sqrt{x^2 - 12}$

ה. $m = 2, f(x) = x\sqrt{x-1}$ ו. $m = 5, f(x) = (x+3)\sqrt{x}$

(29) ענה על הסעיפים הבאים:

א. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y = 2x\sqrt{4x+5}$ אשר המשיק העובר דרכה יוצר זווית של 116.57° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .

ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $y = 3x + \sqrt{3x^2 + 24}$ אשר המשיק העובר דרכה מקביל לישר: $y = 4x - 7$.

(30) ענה על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x^2 + 24}$.

מצא את שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$.

ב. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{3x^2 + 240}$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה שווה לשיפוע הפונקציה שמצאת בסעיף א'. האם קיימת יותר מנקודה אחת? אם כן, מצא את כולן. אם לא, נמק.

ג. הראה כי לשתי הפונקציה יש את אותו השיפוע בעבור: $x = 0$. מהו השיפוע?

31 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{x-3}$ ו- $g(x) = 2 - \sqrt{5-x}$.

- א. מצא את שיעור ה- x בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.
 ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

32 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{2x+6}$ ו- $g(x) = 6 - \sqrt{9-x}$.

- א. מצא את שיעור ה- x בעבורו לשתי הפונקציות יש את אותו השיפוע.
 ב. הראה כי הפונקציות גם נחתכות בנקודה זו.

33 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 5\sqrt{4x-3} + \frac{1}{3}\sqrt{36x-27}$.

- מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכה שווה ל-12.
 הנחייה: לאחר הגזירה הוצא גורם משותף בתוך השורש שבמכנה השני וסמן: $t = 4x-3$ ופתור משוואה בעבור t .

34 מצא שתי נקודות על גרף הפונקציה $y = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ ששיפוע המשיק העובר דרכן

הוא: $m = -1$.

שאלות העוסקות במציאת משוואת משיק לפי הנוסחה: $y - y_1 = m(x - x_1)$,

כאשר: (x_1, y_1) - נקודת ההשקה ו- m שיפוע המשיק.

35 מצא את משוואת המשיק לגרפים של הפונקציות הבאות בנקודות הרשומות לידן:

א. $x=1; y=3x^2 - \sqrt{x}$ ב. $x=7; y=\sqrt{2x-5}$

ג. $x=4; y=(2x^2-8)\sqrt{x}$ ד. $x=2\frac{2}{3}; y=\sqrt{x^2-2x}$

ה. $x=2; y=x\sqrt{x^2+5}$ ו. $x=3; y=\frac{\sqrt{x+6}}{x}$

ז. $x=6; y=\frac{x^2}{\sqrt{x-2}}$ ח. $x=1; y=\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$

36 נתונה הפונקציה הבאה: $y = x - 4\sqrt{x}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה בראשית הצירים.

37 נתונה הפונקציה הבאה : $y = 2x - \frac{1}{3}\sqrt{x}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x שאינה בראשית הצירים.

38 לגרף הפונקציה : $y = x - 2\sqrt{x}$ מעבירים משיק בנקודה שבה $y = 3$.

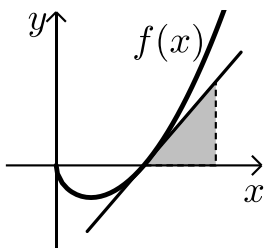
- א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. מצא את נקודות החיתוך של משיק זה עם הצירים.
 ג. חשב את הזוויות של המשולש שנוצר בין המשיק והצירים.
 ד. חשב את שטח משולש זה.

39 נתונה הפונקציה הבאה : $y = \sqrt{x^2 - 4x + 9}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
 ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

40 נתונה הפונקציה הבאה : $y = 3x - \sqrt{25 - 2x^2} + 1$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
 ב. כתוב את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .



41 נתונה הפונקציה : $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x הנמצאת ברביע הראשון.
 ג. מהנקודה A שנמצאת על המשיק מורידים אנך לציר ה- x כך שנוצר משולש בין המשיק, האנך וציר ה- x (ראה איור). ידוע כי שטח המשולש הוא $S = 12$. מצא את שיעורי הנקודה A.

42 נתונה הפונקציה הבאה : $y = x\sqrt{x^2 + 4}$. מעבירים משיק בנקודה $x = 1.5$.

- א. מצא את משוואת המשיק.
 ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- y .
 ג. מעבירים אנך לציר ה- y מנקודת ההשקה של המשיק. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק, האנך וציר ה- y .

(43) נתונה הפונקציה: $y = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. הראה כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ עובר ב- $(0, 0)$.

(44) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{3} \sqrt{2x+3}$.

- א. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 11$.
 ב. כתוב את משוואת המשיק הנ"ל.
 ג. האם יש לגרף הפונקציה משיק נוסף המקביל למשיק שמצאת בסעיף הקודם?
 אם כן, כתוב את משוואתו.

(45) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{3x+1}}{x}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.
 ב. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק שמצאת לצירים.

(46) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך עם ציר ה- y .
 ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק שמצאת לצירים.

(47) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$ ונתון הישר: $y = 2x$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה והישר הנמצאת ברביע הראשון.
 הנחיה: השווה בין שני הביטויים והעלה בריבוע את המשוואה ופתור משוואה דו-ריבועית על ידי סימון: $x^2 = t$.
 ב. מצא את משוואות המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

שאלות העוסקות במציאת משוואת המשיק כאשר נתון מידע הקשור לשיפוע:

תזכורת:

בחלק מהתרגילים יש להיעזר בתכונות השיפועים של ישרים מקבילים ומאונכים:

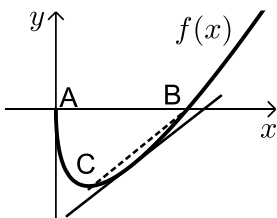
- ישרים מקבילים הם בעלי אותו השיפוע ולהפך.
- מכפלת השיפועים של ישרים מאונכים תמיד -1.
- כגון שני ישרים בעלי שיפועים: m_1, m_2 אזי: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

48) ענה על הסעיפים הבאים:

- א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 4\sqrt{x} - 2$
המקביל לישר: $2y - x = 3$.
- ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{10x + 7}$
המקביל לישר: $y = 5x$.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = 3x + \sqrt{x}$
המאונך לישר: $4y = 5 - x$.
- ד. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \sqrt{4x + 3} - 2x$
המאונך לישר: $y = x$.

49) נתונה הפונקציה: $f(x) = 8\sqrt{x} - x$.

- א. מצא על גרף הפונקציה נקודה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא 3.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך עם ציר ה- x שאינה ראשית הצירים.



50) נתונה הפונקציה: $f(x) = x - 10\sqrt{x}$ באיור הסמוך.

- א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B - נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצא את שיעורי הנקודה C המקיימת: $f'(x) = 0$.
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר BC.

51 נתונות הפונקציה הבאות: $f(x) = x^2\sqrt{x}$, $g(x) = 4\sqrt{2x+3}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בעל השיפוע $m = 20$.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של המשיק שמצאת בסעיף הקודם והפונקציה $g(x)$.
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.

52 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 4\sqrt{3x-2}$, $g(x) = 2x\sqrt{x+3}$.

הראה כי לשתי הפונקציות משיק משותף ששיפועו הוא 3.

53 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 4x\sqrt{10-x}$.

- א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המאונך לישר: $y = -0.5x + 51$.
- ב. הראה כי הישר הנתון בסעיף הקודם הוא נורמל לפונקציה בנקודת ההשקה.

54 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x+3}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מצא את הנקודה אשר שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרכה הוא 0.
- ד. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות שמצאת בסעיפים ב' ו-ג'.

55 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן, באיזו נקודה?
- ג. הראה כי לא קיים ישר המשיק לגרף הפונקציה ומקביל לישר: $y = 6$.

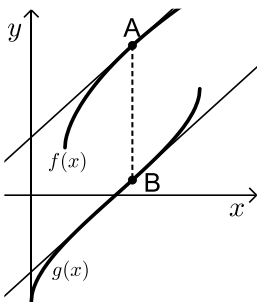
56 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1}$.

- א. מהו תחום הגדרה של הפונקציה?
- ב. כמה נקודות יש לגרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר דרכן מקביל לציר ה- x ? מצא אותן.
- ג. כתוב את משוואות המשיקים בנקודות שמצאת בסעיף הקודם.

57 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{3-3x}$.

- מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.
- הראה כי הגרפים מאונכים זה לזה בנקודת החיתוך שמצאת.
- מצא את משוואות המשיקים לכל פונקציה בנקודת החיתוך שמצאת.
- דרך הנקודות A ו-B, הנמצאות על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בהתאמה, מעבירים ישר. ידוע כי הישר מקביל לציר ה-y. כמו כן מעבירים משיקים לפונקציות דרך הנקודות A ו-B. משיקים אלו מאונכים זה לזה. מצא את הנקודות A ו-B.

58 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x-2}$, $g(x) = 2\sqrt{x} - 2\sqrt{10-x}$.



- מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $g(x)$ כמתואר באיור. ידוע כי הישר AB מקביל לציר ה-y. מעבירים מהנקודות A ו-B משיקים לכל פונקציה. ידוע כי המשיקים מקבילים.
- מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.
- מצא את משוואות המשיקים.

פונקצית שורש - שאלות עם פרמטרים:

59 ענה על השאלות הבאות:

- נתונה הפונקציה: $f(x) = A\sqrt{x} + 3x^2$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 4$ הוא 25. מצא את A.
- נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{5x+A}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$ הוא 1. מצא את A.
- נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + Ax + 25}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y הוא 2. מצא את A.
- נתונה הפונקציה: $y = (x+A)\sqrt{x+1}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודה שבה: $x = 3$ הוא 3. מצא את A.

ה. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+A}$, (A פרמטר). ידוע כי שיפוע הפונקציה

בנקודה שבה: $x=1$ הוא $\frac{1}{18}$.

מצא את A. הבחן בין שני מקרים.

ו. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+Ax+4}}$, (A פרמטר).

ידוע כי שיפוע הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y הוא 4. מצא את A.

60 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{2x+A} + Bx$, (A, B פרמטרים).

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y היא: $y = 3x + 1$. מצא את A ואת B.

61 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x^2 + Ax + B}$, (A, B פרמטרים).

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת שבה: $x=1$ היא: $y = x + 2$. מצא את A ואת B.

62 נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sqrt{x-3}$, פרמטר a.

ידוע כי הפונקציה עוברת ב- $A(12, a+4)$.

א. מצא את ערך הפרמטר a.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.

ג. חשב את השטח שנוצר בין המשיק לצירים.

63 נתונה הפונקציה: $f(x) = a\sqrt{3x+16}$, פרמטר a.

ידוע כי הישר $y = 2x - 8$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 11$.

א. מצא את נקודת החיתוך.

ב. מצא את ערך הפרמטר a.

ג. האם הישר חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודה? אם כן, מהי?

ד. האם הישר הנתון הוא המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף א'?

אם כן, נמק. אם לא, מצא את משוואת המשיק.

64 הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 5$ ו- $g(x) = x^2 - k\sqrt{x}$ (k פרמטר)

נחתכים בנקודה שבה: $x = 6.25$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$?

ג. האם הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים בעוד נקודות?
אם כן – מצא אותן.

ד. מצא את משוואות המשיקים לגרפים של שתי הפונקציות בנקודות החיתוך שלהם.

65 נתונות שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-k}}{x}$ (k פרמטר).

ידוע כי הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה שבה: $x = 0.8$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. האם הפונקציות נחתכות בנקודה נוספת מלבד לנקודה הנתונה?
אם כן – מצא אותה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 0.52$.

66 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+A}}{x+B}$ (A, B פרמטרים).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$ הוא: $-\frac{1}{18}$.

א. מצא את A ואת B .

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y והראה כי בעבור שני המקרים מתקבלת אותה הנקודה.

67 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{Ax^2 + Bx}}$ (A, B פרמטרים).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ הוא: $\frac{1}{8}$.

מצא את A ואת B .

68 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x\sqrt{Ax+3}$. ידוע כי $f'(1) = 2.25$.

א. מצא את ערך הפרמטר A .

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.

ג. כתוב את משוואת הישר המאונך לגרף הפונקציה ועובר דרך נקודת ההשקה הנ"ל (נורמל לפונקציה).

69 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x+7}}{x^2+A}$, פרמטר A.

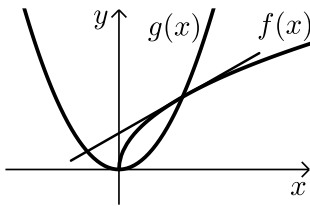
ידוע כי לגרף הפונקציה יש אסימפטוטה אנכית: $x=4$.

- מצא את A ואת האסימפטוטה האנכית הנוספת של גרף הפונקציה.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה: $x=2$.
- מצא את נקודת החיתוך של המשיק והאסימפטוטה: $x=4$.

פונקצית שורש – שאלות מסכמות בשימושי הנגזרת:

70 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

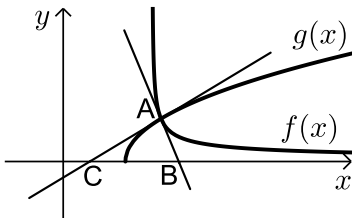
הפונקציות: $f(x) = \sqrt{x}$ ו- $g(x) = x^2 - 1$.



- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ העובר דרך נקודת החיתוך שמצאת הנמצאת ברביע הראשון.
- מצא את נקודת החיתוך הנוספת של המשיק שמצאת עם גרף הפונקציה $g(x)$.

71 באיור שלפניך מתוארים הגרפים של

הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-5}}$ ו- $g(x) = \sqrt{x-3.5} - 1$.



- מצא את הנקודה A - נקודת החיתוך של הגרפים.
- מצא את משוואות המשיקים לכל גרף העוברים דרך נקודת החיתוך.
- המשיקים חותכים את ציר ה- x בנקודות B ו-C כך שנוצר המשולש ABC. חשב את שטח המשולש.

72 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{kx - \sqrt{x}}{2}$. ידוע כי: $f'(9) = \frac{5}{12}$.

- מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שבה x חיובי שמצאת בסעיף הקודם.

73 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{A}{\sqrt{x^2+4}}$, A פרמטר.

- א. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
- ב. מצא את A אם ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 5$.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

74 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{\sqrt{x}}$, (A, B פרמטרים).

- א. מעבירים לגרף הפונקציה שני משיקים. משיק אחד עובר דרך הנקודה שבה $x = 4$ ושיפועו הוא: $m = \frac{3}{8}$. משיק שני מעבירים דרך הנקודה שבה $x = 1$ וידוע כי הוא מקביל לישר: $2y = 5x + 3$.
- ב. מצא את A ואת B.

75 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$.

- א. הראה כי הפונקציה אינה חותכת את הצירים כלל.
- ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה ששיפוע המשיק העובר הוא 0.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 5$.

76 נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x}}$.

- א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. האם ניתן להעביר משיק לגרף הפונקציה המקביל לציר ה- x ? נמק והראה חישוב מתאים.
- ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק לצירים.

פונקצית שורש – שאלות העוסקות בחקירת פונקציה:

שאלות העוסקות במציאת נקודות קיצון לפי הכלל: $f'(x) = 0$

סיווג ומציאת תחומי עלייה וירידה:

(77) לפניך הפונקציות הבאות:

מצא את נקודות הקיצון (כולל נקודות קיצון קצה במידה וישנן) שלהן וקבע את סוגן (זכור למצוא תחילה את תחום ההגדרה ולפסול נקודות שאינן נמצאות בו).

א. $y = x - \sqrt{x}$ ב. $y = x^2 \sqrt{x+2}$ ג. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 25}$

ד. $y = \sqrt{x^4 - 8x^2 + 16}$ ה. $y = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$ ו. $y = \frac{\sqrt{x}}{x-3}$

ז. $y = \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$ ח. $y = \frac{x}{\sqrt{3x^2 - x - 2}}$

(78) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{x^2 + 3x - 4}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(79) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4.5}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה (כולל נקודות קיצון קצה)?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(80) נתונה הפונקציה: $y = \sqrt{x^2 + 3x} - x$.

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון מקומיות כלל.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

שאלות העוסקות בחקירה מלאה של פונקציה אי-רציונאלית:

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. קביעת סוג הקיצון ומציאת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (במידה ויש).
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$y = 2x - \frac{\sqrt{16x-1}}{4} \quad (82)$$

$$y = 2\sqrt{x} - x \quad (81)$$

$$y = \sqrt{x^3 - x} \quad (84)$$

$$y = x^2 \sqrt{4x+5} \quad (83)$$

$$y = \sqrt{x+8} + \sqrt{x+1} \quad (86)$$

$$y = x\sqrt{x^2+5x+7} \quad (85)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \quad (88)$$

$$y = \frac{\sqrt{x}}{x+2} \quad (87)$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{10-x}} \quad (90)$$

$$y = \frac{\sqrt{x+8}}{x^2} \quad (89)$$

$$y = \frac{x^2-4}{\sqrt{9-x^2}} \quad (92)$$

$$y = \frac{3x^2}{\sqrt{x^2+3}} \quad (91)$$

(93) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{16x-x^2}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(94) נתונה הפונקציה: $f(x) = -2\sqrt{36x-x^2}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

95 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

96 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + 24x - 25}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- כתוב את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

97 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 16} + k$, פרמטר k .
ידוע כי לפונקציה יש נקודת מקסימום הנמצאת על ציר ה- x .

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן.
- אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

98 נתונה הפונקציה: $f(x) = k\sqrt{9 - x^2}$. ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון שבה: $y = 12$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן.
- אם לא, נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

99 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x + 1}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

100 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + k - \sqrt{11 - 2x}$, פרמטר k . ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה (5,6).

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון כלשהן? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

101 נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x + k\sqrt{x}$, פרמטר k . ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 16$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

102 נתונה הפונקציה: $f(x) = k\sqrt{x} - x$, פרמטר k . ידוע כי הישר $y = 3$ חותך את הפונקציה בנקודה שבה $x = 9$.

- מצא את ערך הפרמטר k .
- האם הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן, מצא אותן.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

103 נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{8} - 4\sqrt{x}$.

- מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- כתוב את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.

104 נתונה הפונקציה: $f(x) = kx + k\sqrt{x} - 4$, פרמטר k .

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(4, 4k)$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

105 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{16-x}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

106 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{kx} - \sqrt{4-x}$, פרמטר k .

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x בעוד נקודות?
אם כן, מצא אותן ואם לא נמק.
- ד. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? אם כן, מצא אותן ואם לא, נמק.

107 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-2x} + m$, פרמטר m .

- א. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את m אם ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(3, 2)$.
- ד. מצא את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.

108 נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \sqrt{16-x^2}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

109 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{8-x^2} + kx$, פרמטר k .

הישר $y = -2x + 4$ משיק לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

110 נתונה הפונקציה: $y = \frac{\sqrt{x-2}}{4} + \frac{x}{16}$.

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון מקומיות (פנימיות)? מצא במידה וכן.
- ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
- ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים? אם כן, מצא אותן.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון הישר: $y = m$.
לאילו ערכים של m יש לישר ולגרף הפונקציה נקודה משותפת אחת בלבד?

111 לפניך שלוש פונקציות: $f(x) = \sqrt{x+k}$, $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$, $h(x) = x\sqrt{x+k}$ ($k > 0$).

א. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו לא נכונות והצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לכל הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. כל הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. כל הפונקציות חותכות את ציר ה- x פעם אחת בלבד.

מעבירים משיקים לגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודת החיתוך שלהם

עם ציר ה- y . ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $g(x)$ גדול ב- $\frac{1}{4}$ משיפוע

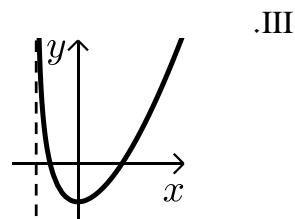
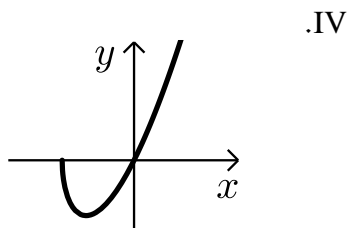
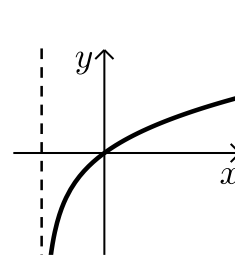
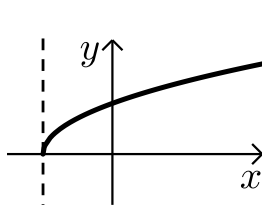
המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$.

ב. ענה על הסעיפים הבאים:

i. בטא באמצעות k את שיפועי המשיקים לכל פונקציה.

ii. מצא את k .

ג. לפניך 4 איורים I-IV, קבע איזה איור מייצג כל פונקציה. נמק את בחירותיך.



*הערה: בשאלה הבאה נדרש ידע בפתרון אי-שוויונים ממעלה גבוהה.

112 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. גזור את הפונקציה $f(x)$.

מגדירים פונקציה נוספת $g(x)$ המקיימת: $g(x) = (f(x))^2$

לפי כללי הגזירה של פונקציה מורכבת ניתן לכתוב את הנגזרת של $g(x)$

באופן הבא: $g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x)$.

ג. כתוב את הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ לפי המכפלה הני"ל וצמצמם במידת האפשר.

הראה כי הביטוי הסופי של הנגזרת הוא: $g'(x) = -\frac{4+x^2}{(x^2-4)^2}$

ד. באופן כללי, לפי כלל הגזירה הני"ל, אלו נקודות על גרף הפונקציה $f(x)$

הן נקודות החשודות לקיצון בעבור $g(x)$?

ה. ענה על הסעיפים הבאים:

i. האם לגרף הפונקציה $g(x)$ יש נקודות קיצון במקרה שלנו?

נמק על פי הסעיף הקודם.

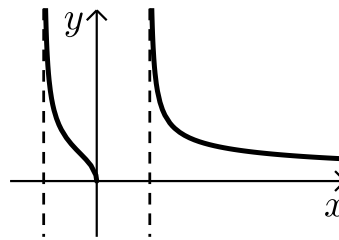
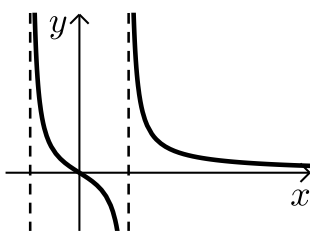
ii. מה ניתן לומר על גרף הפונקציה $f(x)$ לפי זה?

ו. לפניך שתי סקיצות II-I:

קבע איזו סקיצה מתארת את גרף הפונקציה $f(x)$. נמק את בחירתך.

II

I



תשובות סופיות:

- $y' = 2x - \frac{8}{\sqrt{x}}$ (3) $y' = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$ (2) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (1)
- $y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ (6) $y' = 2x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2\sqrt{x}}$ (5) $y' = 2\sqrt{x} + \frac{2x-1}{2\sqrt{x}}$ (4)
- $y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}}$ (9) $y' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$ (8) $y' = -\frac{3x^2+4x\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}(x^2-1)^2}$ (7)
- $y' = \frac{8-3x}{2x^3\sqrt{x-2}}$ (12) $y' = 2x\sqrt{x-2} + \frac{x^2+4}{2\sqrt{x-2}}$ (11) $y' = \sqrt{5x-2} + \frac{5x}{2\sqrt{5x-2}}$ (10)
- $y' = \frac{1-x}{2(x^2+x+1)^{1.5}}$ (15) $y' = -\frac{4}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ (14) $y' = -\frac{x}{(x^2-4)\sqrt{x^2-4}}$ (13)
- $\frac{3x^4+12x^2-8}{\sqrt{x^4+6x^2-8}}$ (18) $8(3x+1)^7 \sqrt{x^2+x} + \frac{(2x+1)(3x+1)^8}{2\sqrt{x^2+x}}$ (17) $6(x+10)^5 \sqrt{x} + \frac{(x+10)^6}{2\sqrt{x}}$ (16)
- $y' = \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$ (21) $y' = \frac{x^2-1}{2x^2 \sqrt{x+\frac{1}{x}}}$ (20) $y' = -\frac{3}{2(x-2)^2} \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$ (19)
- $x \leq -1, x \geq 1$.א $x \leq 3.5$.ב $x \geq 5$.ג $x \geq 0$.ד (22)
- $-1 \leq x \leq 0, x \geq 4$.ה $x \geq 0$.ו $x \leq -1, x \geq 5$.ז $x \leq -2, x \geq 0$.ח
- $x \geq 0, x \neq 5$.ט $x \geq 0$.י $x \leq -1, x \geq 0$.יא $x \leq 2$.יב
- $x < -5, x > 5$.יג $x > 2\frac{2}{3}$.יד $x > 0$.יז $x \neq \pm 4$.יח
- $x < -2, 0 \leq x \leq 25$.יט $x \geq 0$.כ $x < -3, x \geq 1$.כא $-4.5 < x < 4.5$.כב
- 16 .א -7 .ב 3 .ג 2 .ד (23)
- $a=1, b=2$ (24)
- $a=2, b=1$ (25)
- $a=1, b=7$ (26)
- $\frac{28}{\sqrt{20}}$.א $-\frac{2}{9}$.ב $\frac{1}{16}$.ג $66\frac{5}{6}$.ד 3.5 .ה 3.5 .ו (27)
- $(2,2), \left(\frac{10}{9}, \frac{10}{27}\right)$.א $(4,2)$.ב $\left(\frac{1}{36}, -\frac{1}{72}\right)$.ג $(8,5)$.ד $(1,1)$.ה (28)
- $(9,36), \left(\frac{1}{9}, \frac{28}{27}\right)$.א
- $(2,12)$.ב $(-1,-2)$.ג (29)

30 א. $m = \frac{2}{\sqrt{28}}$ ב. $(2, \sqrt{252})$ הנקודה $x = -2$ נפסלת עקב העלאה בריבוע.

ג. $m = 0$.

31 א. $(4, 1)$

32 א. $(5, 4)$

33 $(1, 6)$

34 $(0, 0)$, $(2.25, 4.5)$

35 א. $y = 5.5x - 3.5$ ב. $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ ג. $y = 38x - 104$

ד. $y = 1.25x - 2$ ה. $y = 4\frac{1}{3}x - 2\frac{2}{3}$ ו. $y = -\frac{5}{8}x + 1\frac{5}{6}$

ז. $y = 3.74x - 4.5$ ח. $y = -2x + 4$

36 א. $(16, 0)$, $(0, 0)$ ב. $y = 0.5x - 8$

37 א. $(0, 0)$, $(\frac{1}{36}, 0)$ ב. $y = x - \frac{1}{36}$

38 א. $y = \frac{2}{3}x - 3$ ב. $(4.5, 0)$, $(0, -3)$ ג. 90° , 33.69° , 56.31° ד. 6.75

39 א. $(0, 3)$ ב. $y = -\frac{2}{3}x + 3$

40 א. $(0, -4)$ ב. $y = 3x - 4$

41 א. $(0, 0)$, $(1, 0)$ ב. $y = 1.5x - 1.5$ ג. $A(5, 6)$

42 א. $y = 3.4x - 1.35$ ב. $(-, -1.35)$ ג. 3.825

43 א. $2 \leq x \leq 6$

ב. משוואת המשיק: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$. ניתן לראות כי הגרף עובר ב- $(0, 0)$.

44 א. $m = 2.4$

ג. לא. מתקבל פתרון שנפסל עקב העלאה בריבוע. ב. $y = 2.4x - 8\frac{1}{15}$

45 א. $y = -1\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{4}$ ב. 4.225

46 א. $(0, 1)$ ב. $y = -x + 1$ ג. 0.5

47 א. $(1, 2)$ ב. $y = -1.5x + 3.5$

48 א. $y = 0.5x + 6$ ב. $y = 5x + 4$ ג. $y = 4x + 0.25$ ד. $y = -x + 0.75$

49 א. $(1, 7)$ ב. $(0, 0)$, $(64, 0)$ ג. $9y + x = 64$

- $y = \frac{x}{3} - 37.5$.ג (25, -25) .ב (0,0) , (100,0) .א (50)
- $y = \frac{4}{3}x + 8$.ג (3,12) .ב $y = 20x - 48$.א (51)
- $y = 3x + 2$ (52)
- $y = 2x + 36$.א (53)
- $y = 0.5x + 1$.ג (-1, 0.5) .ג (-2, 0) .ב $x \geq 2$.א (54)
- $x \leq 4, x \neq 0$.א (55)
- $y = 6$.ג (9, 6) .ב $x \geq 0, x \neq 1$.א (56)
- $y = -\sqrt{3}x + 1.25\sqrt{3}, y = \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{4}$.ג (0.75, $\sqrt{0.75}$) .א (57)
- . A(0.25, 0.25) , B(0.25, 1.5) .ד
- A(6, $2\sqrt{6} + 4$) , B(6, $2\sqrt{6} - 4$) .א (58)
- $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)x + \sqrt{6} + 1, y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{2}\right)x + \sqrt{6} - 7$.ב
- .-64 .ג 2,5 .ה 1 .ד 20 .ג 15 .ב 4 .א (59)
- A = 1 , B = 2 (60)
- A = B = 4 (61)
- $S = 6$.ג $y = \frac{1}{3}x + 2$.ב $a = 2$.א (62)
- $7y - 3x = 65$.ד .א $a = 2$.ב (11, 14) .א (63)
- .ג אין עוד נקודות חיתוך בניהם .ג $x \geq 0$.ב $k = 3$.א (64)
- $y = 10.5x - 34.0625, y = 11.9x - 42.8125$.ד
- $y = 0.74x + 0.1352$.ג (0.6, 0.57) .ב $k = 0.48$.א (65)
- $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$.ב A = 9 , B = -9 .א (66)
- . A = B = 2 (67)
- $y = \frac{4}{9}x + 2\frac{4}{9}$.ג $y = 2.25x - 0.25$.ב A = 1 .א (68)
- $\left(4, -\frac{4}{9}\right)$.ג $y = -\frac{7}{72}x - \frac{1}{18}$.ב A = -16 , x = 4 .א (69)
- $(-0.5, 0.25)$.ג $y = 0.5x + 0.5$.ב (0, 0) , (1, 1) .א (70)
- $S = \frac{5}{\sqrt{2}}$.ג $y = \frac{x}{\sqrt{8}} - \frac{3}{4\sqrt{2}}$, $y = 6.5\sqrt{2} - \sqrt{2}x$.ב A(5.5, $\sqrt{2}$) .א (71)

72 א. $k=1, f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{2}$ ב. $(0,0), (1,0)$ ג. $y = 0.25x - 0.25$

73 ב. $A = 10$ ג. $y = 5$

74 א. $A = 1, B = -7$

75 ב. $\left(3, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$ ג. $y = 0.125x + 2.375$

76 א. $(2,0)$

ב. לא, מאחר שאין פתרון למשוואה: $f'(x) = 0$ ג. $y = \frac{4}{\sqrt{2}}x - 4\sqrt{2}$

ד. $S = 4\sqrt{2}$

77 א. $\max(0,0), \min(0.25, -0.25)$ ב. $\max(-1.6, 1.619), \min(0,0), \min(-2,0)$

ג. $\min(2, \sqrt{21})$ ד. $\max(0,4), \min(2,0), \min(-2,0)$

ה. $\max\left(3, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right), \min(0,0)$ ו. $\max(0,0)$ ז. אין קיצונים כלל.

ח. $\max\left(-4, -\frac{4}{\sqrt{50}}\right)$

78 א. $x \leq -4, x \geq 1$ ב. $\min(-4,0), \min(1,0)$

ג. עולה: $x > 1$ יורדת: $x < -4$

79 א. כל x ב. $\min(-1.5, 1.5)$ ג. עולה: $x > -1.5$ יורדת: $x < -1.5$

80 א. $x \leq -3, x \geq 0$ ג. עולה: $x > 0$, יורדת: $x < -3$

81 א. $x \geq 0$ ב. $\max(1,1), \min(0,0)$

ג. עולה: $0 < x < 1$ יורדת: $x > 1$ ד. $(0,0), (0,4)$ ה. אין.

82 א. $x \geq \frac{1}{16}$ ב. $\max\left(\frac{1}{16}, \frac{1}{8}\right), \min\left(\frac{1}{8}, 0\right)$

ג. עולה: $x > \frac{1}{8}$ יורדת: $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{8}$ ד. $\left(\frac{1}{8}, 0\right)$ ה. אין.

83 א. $x \geq -\frac{5}{4}$ ב. $\max(-1,1), \min(0,0), \min\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$

ג. עולה: $x > 0, -\frac{5}{4} < x < -1, -1 < x < 0$ יורדת: $-1 < x < 0$ ד. $\left(-\frac{5}{4}, 0\right), (0,0)$ ה. אין.

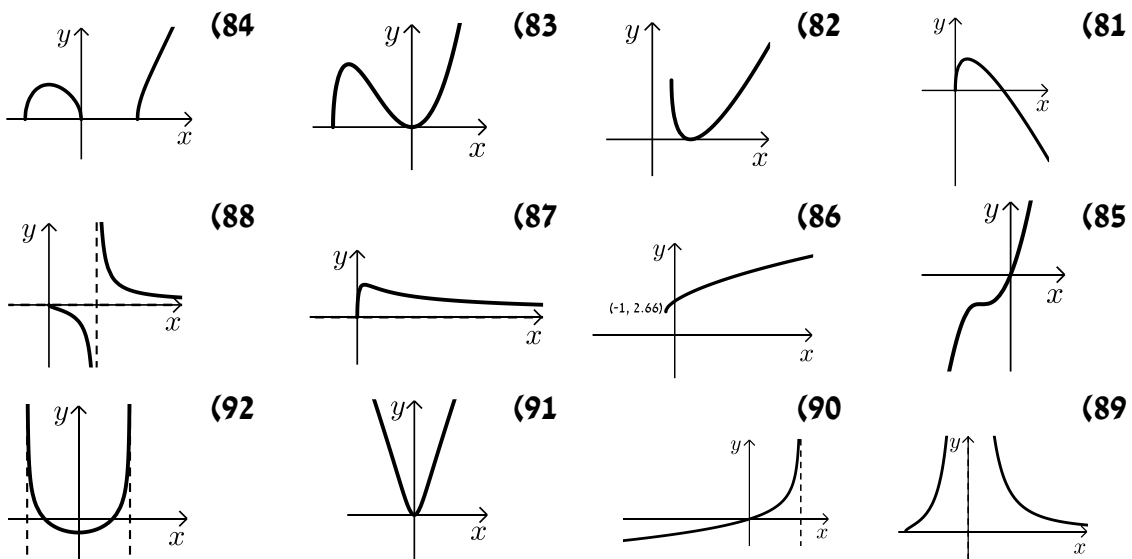
84 א. $-1 \leq x \leq 0, x \geq 1$ ב. $\max(-0.57, 0.62), \min(0,0), \min(1,0), \min(-1,0)$

ג. עולה: $-1 < x < -0.57, x > 1$ יורדת: $-0.57 < x \leq 0$

ד. $(0,0), (1,0), (-1,0)$ ה. אין.

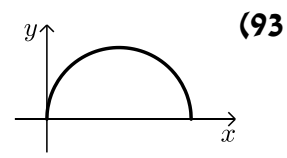
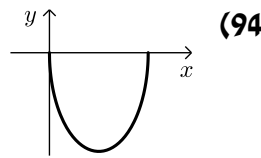
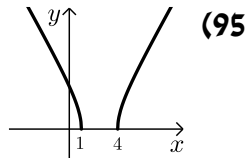
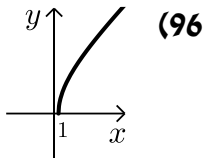
- (85) א. כל x . ב. $\max(-2, -2), \min(-1.75, -2.004)$.
 ג. עולה: $x < -2, x > -1.75$; יורדת: $-2 < x < -1.75$. ד. $(0, 0)$. ה. אין.
 (86) א. $x \geq -1$. ב. $\min(-1, \sqrt{7})$. ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. אין.
 ה. אין.
 (87) א. $x \geq 0$. ב. $\max\left(2, \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \min(0, 0)$.
 ג. עולה: $0 < x < 2$; יורדת: $x > 2$. ד. $(0, 0)$. ה. $y = 0$.
 (88) א. $x \geq 0, x \neq 2$. ב. $\max(0, 0)$. ג. יורדת בכל תחום הגדרתה.
 ד. $(0, 0)$. ה. $x = 2, y = 0$.
 (89) א. $x \geq -8, x \neq 0$. ב. $\min(-8, 0)$. ג. עולה: $-8 < x < 0$; יורדת: $x > 0$.
 ד. $(-8, 0)$. ה. $x = 0, y = 0$.
 (90) א. $x < 10$. ב. אין קיצון. ג. עולה בכל תחום הגדרתה.
 ד. $(0, 0)$. ה. $x = 10$.
 (91) א. כל x . ב. $\min(0, 0)$. ג. עולה: $x > 0$; יורדת: $x < 0$.
 ד. $(0, 0)$. ה. אין.
 (92) א. $-3 < x < 3$. ב. $\min\left(0, -\frac{4}{3}\right)$. ג. עולה: $0 < x < 3$; יורדת: $-3 < x < 0$.
 ד. $(\pm 2, 0), \left(0, -\frac{4}{3}\right)$. ה. $x = \pm 3$.

סקיצות של שאלות 81-92:



- (93)** א. $0 \leq x \leq 16$ ב. $\max(8,8)$, $\min(0,0)$, $\min(16,0)$
 ג. עולה: $0 < x < 8$, יורדת: $8 < x < 16$.
- (94)** א. $0 \leq x \leq 36$ ב. $\max(36,0)$, $\max(0,0)$, $\min(18,-36)$
 ג. עולה: $18 < x < 36$, יורדת: $0 < x < 18$.
- (95)** א. $x \geq 4$, $x \leq 1$ ב. $\min(4,0)$, $\min(1,0)$
 ג. עולה: $x > 4$, יורדת: $x < 1$ ד. $(0,2)$.
- (96)** א. $x \geq 1$, $x \leq -25$ ב. $\min(-25,0)$, $\min(1,0)$
 ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $x < -25$.

סקיצות של שאלות: 93-96:



- (97)** א. $k = -3$ ב. $2 \leq x \leq 8$
 ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה: $\min(2,-3)$, $\min(8,-3)$
 ד. עולה: $2 < x < 5$, יורדת: $5 < x < 8$.
- (98)** א. $k = 4$ ב. $-3 \leq x \leq 3$
 ג. כן – ישנן נקודות קיצון קצה: $\min(-3,0)$, $\min(3,0)$
 ד. עולה: $-3 < x < 0$, יורדת: $0 < x < 3$.
- (99)** א. $x \geq -1$ ב. $\max(-1,0)$, $\min(0,-1)$ ג. $(-1,0)$, $(3,0)$
 ד. עולה: $x > 0$, יורדת: $-1 < x < 0$
 ה. חיובית: $x > 3$, שלילית: $-1 < x < 3$.
- (100)** א. $k = 2$ ב. $x \leq 5.5$

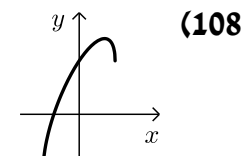
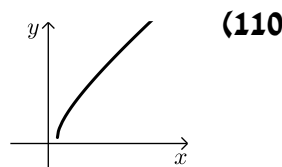
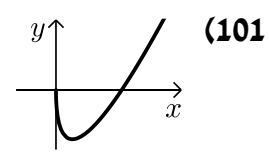
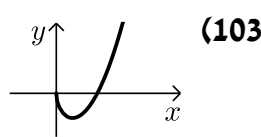
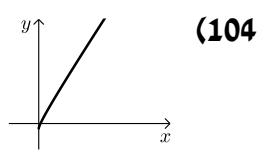
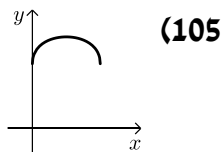
ג. כן – ישנה נקודת קיצון קצה: $(5.5, 7.5)$. לא קיימת נקודת קיצון מקומית מאחר ש- $x = 5$ המתקבל בעת השוואת הנגזרת לאפס נפסל כי אינו מקיים את המשוואה המקורית.

ד. הנקודה שבה $x = -7$ אינה מקיימת את המשוואה המקורית ולכן נפסלת.

- (101)** א. $k = -12$ ב. $\min(4,-12)$, $\max(0,0)$ ג. עולה: $x > 4$, יורדת: $0 < x < 4$.
- (102)** א. $k = 4$ ב. $(1,3)$ ג. $\min(0,0)$, $\max(4,4)$ ד. $(0,0)$, $(16,0)$.

- 103** א. $x \geq 0$. ב. $\min(4, -6)$, $\max(0, 0)$. ג. עולה : $x > 4$ יורדת : $0 < x < 4$. ד. $(0, 0)$, $(\sqrt[3]{1024})$.
ו. חיובית : $x > 10$, שלילית : $0 < x < 10$.
- 104** א. $k = 2$. ב. יש קיצון קצה - $(0, -4)$. ג. עולה בכל תחום הגדרתה . ד. $(1, 0)$.
- 105** א. $0 \leq x \leq 16$. ב. $\min(0, 4)$, $\min(16, 4)$, $\max(8, 2\sqrt{8})$. ג. עולה : $0 < x < 8$, יורדת : $8 < x < 16$.
- 106** א. $k = 1$. ב. $0 \leq x \leq 4$. ג. לא . ד. אין קיצונים .
- 107** א. יש להראות כי הנגזרת מורכבת מחיבור של שני ביטויים שחיוביים תמיד ומכאן שסימן הנגזרת חיובי והפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה .
ב. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{9-2x}}$ - הנגזרת בנויה משני ביטויים חיוביים .
- ג. $0 \leq x \leq 4.5$. ד. $m = 2$.
א. $\min(0, -1)$, $\max(4.5, 2 + \sqrt{4.5})$. ב. $0 \leq x \leq 4.5$. ג. $m = 2$.
- 108** א. $-4 \leq x \leq 4$. ב. $\min(-4, -4)$, $\min(4, 4)$, $\max(\sqrt{8}, 2\sqrt{8})$. ג. $(0, 4)$, $(-\sqrt{8}, 0)$.
- 109** א. $k = -1$. ב. $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$. ג. $\min(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$, $\min(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$, $\max(-2, 4)$. ד. עולה : $-\sqrt{8} < x < 2$, יורדת : $-2 < x < -\sqrt{8}$.
- 110** א. $x \geq 2$. ב. אין נקודות קיצון . ג. $(2, \frac{1}{8})$. ד. אין נקודות חיתוך עם הצירים . ו. $m \geq \frac{1}{8}$.

סקיצות של שאלות 101-110 (אלו שיש בהן גרף):



111 א. i. הטענה אינה נכונה.

תחומי ההגדרה הם: $f(x): x \geq -k$; $g(x): x > -k$; $h(x): x \geq -k$.

ii. הטענה אינה נכונה. הפונקציה: $f(x)$ עולה תמיד שכן: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}} > 0$.

הפונקציה: $g(x)$ גם עולה תמיד שכן: $g'(x) = \frac{x+2k}{(x+k)^{1.5}} > 0$ כי הנקודה $x = -2k$

אינה בתחום ההגדרה וערך הנגזרת בתחום ההגדרה חיובי. לפונקציה: $h(x)$ יש

נקודת מינימום ב- $x = -\frac{2}{3}k$ אשר בתוך תחום הגדרתה ולכן היא יורדת

בעבור: $-k < x < -\frac{2}{3}k$.

iii. הטענה אינה נכונה.

נקודות החיתוך: $f(x): (-k, 0)$; $g(x): (0, 0)$; $h(x): (-k, 0), (0, 0)$.

ב. i. $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}$. ii. $k = 4$. ג. $I = g(x)$, $II = f(x)$, $IV = h(x)$.

$$f'(x) = -\frac{x^2+4}{2(x^2-4)^2 \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}}$$

112 א. $x > 2$, $-2 < x \leq 0$.

ד. נקודות החיתוך של $f(x)$ עם ציר ה- x ונקודות המאפסות את הנגזרת של $f(x)$.

ה. i. לא. ל- $f(x)$ אין נקי קיצון והנקודה $(0, 0)$ אינה קיצון בעבור $g(x)$.

ii. יורדת בכל תחום הגדרתה. ו. I.