

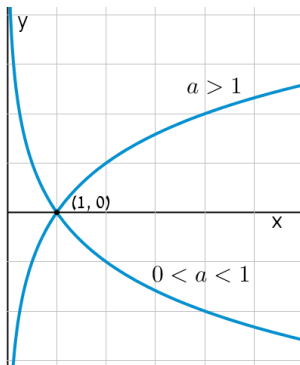
תוכן העניינים:

2	פרק 10
2	חקירת פונקציה לוגריתמית
2	הגדרות כלליות:
2	תכונות כלליות:
2	תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:
3	נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:
4	שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:
4	שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:
5	שאלות שונות העוסקות בחקירה:
6	שאלות שונות מבחינות:
10	תשובות סופיות:
13	תרגול נוסף:
19	תשובות סופיות:

פרק 10

חקירת פונקציה לוגריתמית

הגדרות כלליות:



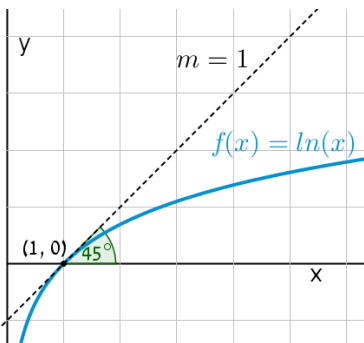
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית

כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$

עבור $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:

תכונות כלליות:

- לפונקציות תחום הגדרה $x > 0$.
- הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה $(1, 0)$.
- עבור $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.



עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל

כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- x הוא 1:

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log(f(x))$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$y = \log_a x$
$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$	$y = \log_a f(x)$
$y' = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$
$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$	$y = \ln f(x)$

שאלות יסודיות – חישובי נגזרות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (גזירה לוגריתמית יסודית עם ביטויים פנימיים שונים):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$

ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$

ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \ln(\cos x)$

ו. $f(x) = \log_2 x + 5 \log_3(2x-1)$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$

ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$

ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$

ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$

ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$

ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

שאלות העוסקות בשימושי הנגזרת:

(4) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e,1)$.

(5) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

שאלות שונות העוסקות בחקירה:

(6) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

- | | |
|--|--|
| <p>א. $f(x) = \ln x$</p> <p>ב. $f(x) = \ln(x^2)$</p> <p>ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$</p> <p>ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$</p> <p>ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$</p> <p>ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$</p> <p>ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$</p> | |
|--|--|

(7) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

(8) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

(9) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

(10) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

(11) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(12) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.

14 נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה של הפונקציה.
- ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות שונות מבחינות:

15 נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

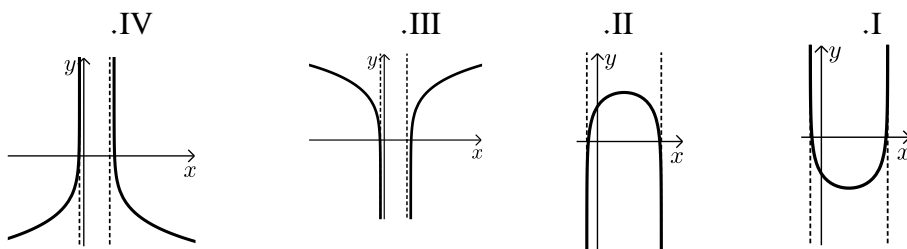
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
- ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$. מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

16 נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.
 נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
- i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - iii. לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

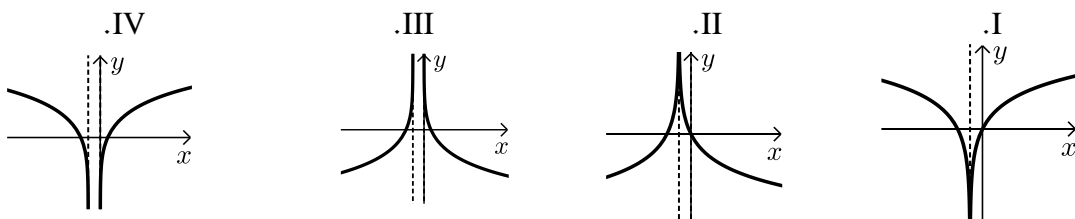
17 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



18 נתונה הפונקציה: $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

19) לפניך הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

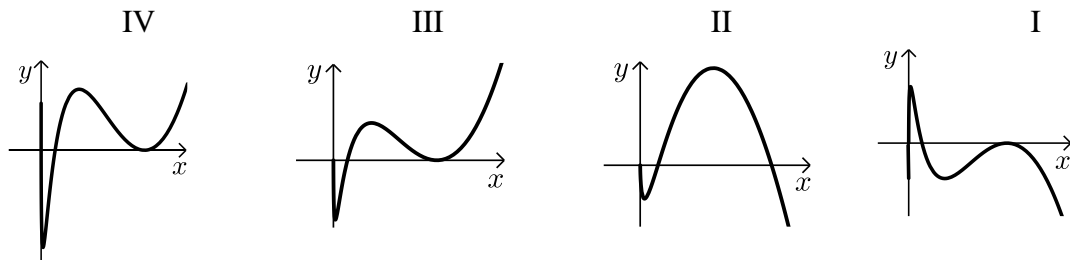
20) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

21) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ג. ענה על השאלות הבאות:
 - i. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 - ii. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.

ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה $g(x) = \ln x$.

(23) ענה על הסעיפים הבאים :

א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$.

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x = e$.

(24) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, פרמטר חיובי, $a \neq 1$.

א. הבע באמצעות a את :

i. תחום ההגדרה של הפונקציה.

ii. הנקודה המקיימת $y' = 0$.

iii. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

iv. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום : $x > e - 2$. מצא את a .

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.

ד. נתון הישר : $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר

ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

(25) נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים :

i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ii. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ?

אם כן מצא אותה.

ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

$$f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \text{ א. (1)}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \text{ ד.} \quad f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)} \text{ ג.}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3} \text{ ה.} \quad f'(x) = -\tan x \text{ ו.}$$

$$f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \text{ ב.} \quad f'(x) = \ln x + 1 \text{ א. (2)}$$

$$f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x+x}} \text{ ו.} \quad f'(x) = \frac{4}{x(\ln x+2)^2} \text{ ד.} \quad f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \text{ ג.}$$

$$f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \text{ ג.} \quad f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \text{ ב.} \quad f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \text{ א. (3)}$$

$$f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \text{ ד.}$$

$$y = \frac{1}{e} x \text{ (4)}$$

$$a = 2, b = -2 \text{ (5)}$$

$$x > \ln 4 \text{ ד.} \quad x < -2 \text{ או } x > 10 \text{ ג.} \quad x \neq 0 \text{ ב.} \quad x > 0 \text{ א. (6)}$$

$$.x \geq e \text{ ו.} \quad x \neq e^3, e^{-1} \text{ וגם } x > 0 \text{ ה.} \quad 0 < x \neq e \text{ ו.}$$

$$\max(1, -1) \text{ (7)}$$

$$\min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \text{ (8)}$$

$$\max\left(e, \frac{1}{e}\right), \text{ קצה, } \min(\sqrt{e}, 0) \text{ (9)}$$

$$\min(4, -1) \text{ (10)}$$

$$.a = 1, b = -1 \text{ (11)}$$

$$\max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right), \min(1, 0) \text{ ב.} \quad x > 0 \text{ א. (12)}$$

$$. (1, 0) \text{ ד.} \quad \frac{1}{e^2} < x < 1 : \text{ ירידה, } 0 < x < \frac{1}{e^2} \text{ או } x > 1 : \text{ עלייה: (13)}$$

$$0 < x < e^2 : \text{ ירידה, } x > e^2 : \text{ עלייה: } \min(e^2, e^2) \text{ ב.} \quad 0 < x \neq e \text{ א.}$$

$$x \neq e \text{ וגם}$$

$$.k > e^2 \text{ ו.} \quad \text{ד. אין.}$$

(14) א. $x > 0$ ב. $\min(4, -1)$ ג. עלייה: $x > 4$, ירידה: $0 < x < 4$
ד. $(1, 0)$, $(16, 0)$.

(15) א. $x \geq 1$ ב. מתקבל: $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0$ ג. $(1, 0)$, $(e, 1)$
ד. $x = \sqrt[4]{e}$.

(16) א. i. לא נכון. תחום ההגדה של $f(x)$ הוא: $x > 0, x \neq 1$ ותחום ההגדרה של $g(x)$ הוא: $x > 0$.

ii. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$ מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

iii. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$; יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$.
ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$; יורדת: $x > e$.

iv. נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה- y שלה הוא: $y = \frac{x}{\ln x}$ ו- $y = \frac{\ln x}{x}$.

$$\text{נכפול: } y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$$

(17) א. $x < -1, x > 7$ ב. $x = -1, 7$ ג. עולה: $x > 7$; יורדת: $x < -1$.
ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

(18) א. $x \neq -1$ ב. $x = -1$ ג. עולה: $x > -1$; יורדת: $x < -1$.
ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים. באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $-2 < x < 0, x \neq -1$.

(19) א. $0 < x < e$. (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: $1 - \ln x > 0$ וגם $x > 0$).

ב. $f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0$. ולכן הפונקציה יורדת בת.ה. ג. $(1, 0)$.

(20) א. $x < -\frac{1}{2}, x > 1$ ב. $x = -\frac{1}{2}, 1$ ג. $(-2, 0)$

ד. מתקבל: $y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$

(21) ב. $x > 1, e^{-4} < x < e^{-1}$.

ג. i. 2 נקודות והן: $(e^{-2}, 0)$, $(1, 0)$. הנקודה שבה: $x = 0$ לא קיימת עקב

ת.ה.

ii. $x \neq 1, x > e^{-2}$.

ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(22) א. $x > 0$ ב. $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(e^{\sqrt{3}}, 0)$, $(1, 0)$

ג. $\min(e, -2)$, $\max(e^{-1}, 2)$.ה. $(1, 0)$, $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$.

(23) א. $x = e$ ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$ ג. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$

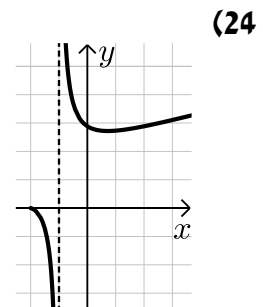
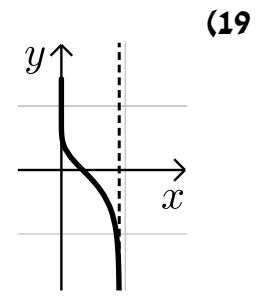
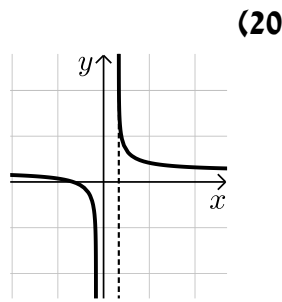
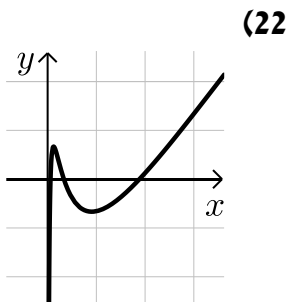
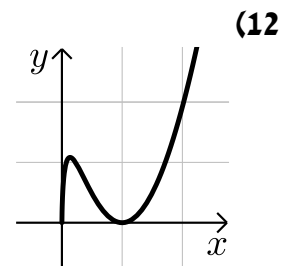
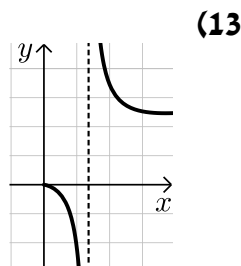
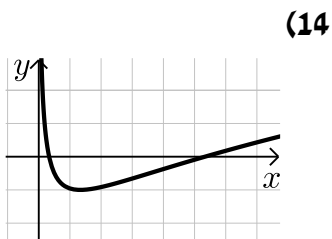
(24) א. i. $x > -a, x \neq 1-a$ ii. $(e-a, e)$ iii. $(0, \frac{a}{\ln a})$

iv. $x = 1-a$ ב. $a = 2$ ד. $k < e$

(25) א. i. $x > 0$ ii. $x = 0$ ב. $\min(1, 1)$

ג. עולה: $x > 1$, יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:



תרגול נוסף:

(1) נתונה הפונקציה הבאה: $y = x(\ln x - 4)$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(2) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln x + \sqrt{3-2x}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הגדרתה.
- ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

(3) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln(-x^2 + 4x - 3)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
- ג. הראה כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x^2)$.

- א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:
 - i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - ii. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? נמק והראה חישוב מתאים.
 - iii. האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית? אם כן מהי?
 - iv. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - v. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 - vi. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ב. נתונה הפונקציה: $g(x) = (\ln x)^2$. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = (\ln x)^2 + a \ln(x^2)$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = e^2$.

- א. מצא את a .
- ב. מצא האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודות נוספות.
- ג. הראה כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי שהוא -1 .

(6) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln^2(x+a)$, a פרמטר.

- א. הבע באמצעות a את:
 - i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - ii. האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.
- ב. באיזה תחום צריך להימצא a עבורו האסימפטוטה של הפונקציה תהיה מימין לציר ה- y ?
- ג. ענה על הסעיפים הבאים:
 - i. הראה כי עבור התחום שמצאת בסעיף הקודם יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון עם שיעור x חיובי.
 - ii. הוכח כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x וקבע את סוגה.
- ד. מצא את a אם ידוע כי הפונקציה עולה בתחום: $x > 4$.

(7) נתונה הפונקציה הבאה: $y = (x+k)(\ln(x+k)-1)$, k פרמטר.

- א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = \ln(x+k)$.
- ב. הבע באמצעות k את:
 - i. נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
 - ii. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. ידוע כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y . מצא את k .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. העזר בסקיצה של גרף הפונקציה והוכח כי אי-השוויון הבא: $(x+k)(\ln(x+k)-1) \geq -1$ מתקיים עבור כל x .

- 8** נתונה הפונקציה: $f(x) = x(\ln x)^2$.
- א. ענה על הסעיפים הבאים:
- i. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$.
- iii. הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .
- ב. האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטות? נמק.
- ג. נתון הישר: $y = 4x$. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר.

- 9** נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln \frac{x}{x+a}$, $a > 0$ פרמטר.

- א. הבע באמצעות a את:
- i. תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. נגזרת הפונקציה מקיימת: $f'(1) = 0.5$. מצא את a .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

- 10** נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln^2(x-a)$, $a > 0$ פרמטר.

- א. הראה כי הנגזרת השנייה של הפונקציה היא: $f''(x) = \frac{2-2\ln(x-a)}{(x-a)^2}$.
- ב. הבע באמצעות a את שיעורי הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.
- ג. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.
- ד. הבע באמצעות a את משוואת המשיק הני"ל.
- ה. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = -2e^{-1} - 1$. מצא את a .

- 11** נתונה הפונקציה הבאה: $y = k \ln x - x^3$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ הוא -26 .

- א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. היעזר בסעיף הקודם והוכח את הטענות הבאות:
- i. גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .
- ii. גרף הפונקציה שלילי בכל תחום הגדרתו.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12 ענה על הסעיפים הבאים :

- א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln^2 x + 2 \ln x = 0$.
- ב. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה : $f(x) = x(\ln x)^3$ היא : $f'(x) = (\ln x)^3 + 3(\ln x)^2$.
- ג. הוכח כי הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא : $f''(x) = \frac{3\ln^2 x + 6\ln x}{x}$.
- ד. הראה כי אחת מהנקודות המקיימות $f''(x) = 0$ נמצאת על ציר ה- x .

13 ענה על הסעיפים הבאים :

- א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln^2(10-x^2) - \sqrt{\ln(10-x^2)} = 0$
(רמז : סמן $t = \ln(10-x^2)$ ופתור עבור t).
- ב. לפניך הפונקציות הבאות : $f(x) = \ln^2(10-x^2)$, $g(x) = \sqrt{\ln(10-x^2)}$
קבע אלו מהמשפטים הבאים נכונים לגבי הפונקציות ואלו לא.
נמק כל הסבר בחישוב מתאים.
- i. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - ii. לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון אחת הנמצאת על ציר ה- y .
 - iii. הגרפים של הפונקציות נחתכים ב-2 נקודות בלבד.
 - iv. הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותן הנקודות.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ על סמך מה שקבעת בסעיף ב'.

14 נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון כלל.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ו. נתון הישר : $y = k$. האם קיימים ערכי k עבורם הישר יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד? אם כן – מצא אותם.

15 נתונה הפונקציה: $y = \log_2(3x+1)$.

- א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16 נתונה הפונקציה הבאה: $y = x^2 \log_{0.5}(x^2)$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

17 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \log_3(x^2 + ax + 9)$.

- ידוע כי יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה אנכית: $x = -3$.
- א. מצא את a .
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. הישר $y = 6$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות. מצא את נקודות אלו.

18 נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-1}{x-2}$, $g(x) = 1 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של כל פונקציה.
- ב. הראה כי הגרפים של הפונקציות לא נחתכים באף נקודה.
- ג. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .

19 נתונה הפונקציה הבאה: $y = \log_4(x-2) - \log_{16}(x^2-4)$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- ג. מעבירים ישר $y = -1$ החותך את גרף הפונקציה. מצא את שיעור ה- x של נקודת החיתוך.

(20) נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{1}{\log_2(x-2)} + \frac{1}{\log_4 x}$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 4$.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

תשובות סופיות:

- (1) א. $x > 0$. ב. $\min(e^3, -e^3)$. ג. $(e^4, 0)$.
- (2) א. $0 < x \leq 1.5$. ב. $(1, 1)$. ג. $x = 0$.
- (3) א. $1 < x < 3$. ב. $x = 1, 3$. ג. $(2, 0)$.
- (4) א. i. $x \neq 0$. ii. לא. הנגזרת היא: $y' = \frac{2x}{x^2}$ והרי ש- $x \neq 0$. iii. $x = 0$.
- (5) iv. עולה: $x > 0$ יורדת: $x < 0$. v. $(-1, 0)$, $(1, 0)$. ב. $(1, 0)$. א. $a = -1$.
- ג. לגרף הפונקציה נקודת מינימום יחידה והיא: $(e, -1)$. לכן ערך הפונקציה המינימלי הוא -1 .
- (6) א. i. $x > -a$. ii. $x = -a$. ב. $a < 0$.
- ג. i. מתקבל: $0 < 1 - (-) = 1 - a$. ii. $\min(1 - a, 0)$. ד. $a = -3$.
- (7) א. i. $(1 - k, -1)$. ii. $(0, k(\ln k - 1))$, $(-k, 0)$, $(e - k, 0)$. ג. $k = 1$.
- (8) א. i. $x > 0$. ii. הוכחה . iii. $(1, 0)$.
- ב. לא. גרף הפונקציה שואף ל-0 בגבול שלו . ג. $(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2})$, $(e^2, 4e^2)$.
- (9) א. i. $x > -a$, $x < 0$. ii. $x = 0, -a, y = 0$.
- ב. מתקבלת הנגזרת: $y' = \frac{a}{x(x+a)} > 0$. ג. $a = 1$.
- (10) א. ב. $(a + e, 1)$. ג. $m = \frac{2}{e}$. ד. $y = \frac{2}{e}x - \frac{2a}{e} - 1$. ה. $a = 1$.
- (11) א. $k = 3$, $y = 3 \ln x - x^3$. ב. $x > 0$. ג. $\max(1, -1)$.
- ד. i. + ii. הערך המקסימלי של הפונקציה הוא -1 ולכן גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה- x וכולו שלילי .
- (12) א. $x = 1, e^{-2}$.
- (13) א. $x_{1,2} = \pm 3$, $x_{3,4} = \pm 2.7$.
- ב. i. לא. עבור: $f(x)$ ת.ה. הוא: $-3.16 < x < 3.16$. עבור: $g(x)$ ת.ה. הוא: $-3 \leq x \leq 3$.
- ii. עבור $f(x)$ הנקודה: $\max(0, 5.3)$. עבור $g(x)$ הנקודה: $\max(0, 1.5)$.
- iii. לא. מסעיף א' ניתן לראות כי הגרפים חותכים זה את זה ב-4 נקודות שונות .
- iv. כן. $(-3, 0)$, $(3, 0)$.

14 א. $0 < x \leq 1, x \geq e^2$. ב. ניתן לראות כי :

$$f'(x) = \frac{\frac{2 \ln x}{x} - \frac{2}{x}}{2\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{2 \ln x - 2}{2x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} = \frac{\ln x - 1}{x\sqrt{\ln^2 x - 2 \ln x}} \rightarrow x \neq e$$

הפתרון נפסל עקב ת.ה. ולכן אין נקודות קיצון כלל.

ג. עולה: $x \geq e^2$. יורדת: $0 < x \leq 1$. ג. $(1,0)$, $(e^2,0)$.

ו. לא. הגרף תמיד יחתך בשתי נקודות כאשר $k \geq 0$ ובאף נקודה כאשר $k < 0$:

15 א. $x > -\frac{1}{3}$. ב. מתקבל: $y' = \frac{3}{(3x+1)\ln 2} > 0$.

16 א. $x \neq 0$. ב. $\max(-0.606, 0.53)$, $\max(0.606, 0.53)$.

ג. עולה: $0 < x < 0.606$, $x < -0.606$, יורדת: $x > 0.606$, $-0.606 < x < 0$.

17 א. $a = 6$. ב. $(-4,0)$, $(-2,0)$. ג. $(24,6)$, $(-30,6)$.

18 א. עבור $f(x)$: $x < 1$, $x > 2$, עבור $g(x)$: $x < 0$, $x > 2$.

ב. הנקודה המתקבלת ($x = 1.5$) אינה בתחום. ג. $y = \frac{1}{2 \ln 3} x + \frac{\ln 2}{\ln 3}$.

19 א. $x > 2$. ב. מתקבל: $y' = \frac{2}{(x^2 - 4)\ln 4} > 0$.

ג. $x = 2 \frac{4}{15} \approx 2.266$.

20 א. $x > 2$, $x \neq 3$. ב. $y = -\frac{5}{4 \ln 4} x + \frac{5 + \ln 16}{\ln 4}$.

ג. $\left(0, \frac{5 + \ln 16}{\ln 4}\right)$, $\left(\frac{4(5 + \ln 16)}{5}, 0\right)$. ד. $S = \frac{2(5 + \ln 16)^2}{5 \ln 4}$.

סקיצות לשאלות:

