

תוכן העניינים:

2	פרק 1
2	סדרות
2	הסדרה החשבונית:
2	סיכום כללי:
3	שאלות לפי נושאים:
8	תשובות סופיות:
9	הסדרה ההנדסית:
9	סיכום כללי:
9	שאלות לפי נושאים:
13	תשובות סופיות:
14	סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:
14	סיכום כללי:
15	שאלות שונות:
17	תשובות סופיות:
18	סדרות נסיגה:
18	סיכום כללי:
18	שאלות:
21	תשובות סופיות:

פרק 1

סדרות

הסדרה החשבונית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**
נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה חשבונית:**
כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

- **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:**
סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה

$$\text{הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י: } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

$$\text{בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים: } S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2}.$$

שאלות לפי נושאים:

שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4.5, 7, 9.5, 12, 14.5, \dots, 49.5$.
- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
- (6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
- (7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$.
- (8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$.
- (9) נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

שאלות העוסקות בסכום סדרה חשבונית:

- 10** מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$.
- 11** נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \dots$. כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
- 12** תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
- 13** נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \dots$. כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
- 14** נתונה הסדרה החשבונית: $4, 13, 22, 31, \dots$. בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
- 15** נתונה הסדרה החשבונית: $4, 9, 14, 19, \dots, 599$. מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנתרו.
- 16** סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .
ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
- 17** נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.
א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
- 18** נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$. בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

19 בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 612. הוכח כי $nd = 60$.

20 בסדרה חשבונית עולה, שכל איבריה חיוביים ובה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

שאלות מסכמות:

21 בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
 ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

22 לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. מצא את x .
 ii. מצא את הפרש הסדרה.
 ב. ידוע כי $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .
 ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.
 מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

23 בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח: $a_5 = 0$.
 ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את a_1 ואת d .
 ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.
 מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

(24) מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

$$\left. \begin{array}{l} 150, 144, 138, \dots \\ 90, 93, 96, \dots \end{array} \right\} \text{נתונים שני טורים חשבוניים:}$$

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר האחרון מהטור השני) הוא אפס.

- א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.
 ב. מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

(25) בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.

- א. הוכח את הטענות הבאות:
 i. $a_1 = -4d$ ii. $S_9 = 0$.
 ב. האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5. מצא את a_1 ואת d .
 ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

(26) נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה

$$\text{הוא } d_2. \text{ ידוע כי: } d_1 = -2d_2.$$

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .

- א. מצא את הפרש הסדרה $a_n - d_1$.
 ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} . מצא את a_1 ואת b_1 .

(27) אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

- ההצעה הראשונה: לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.
 ההצעה השנייה: לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם. ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים בהצעה הראשונה.
 א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה?
 ב. מה מחיר הרכב?

- (28)** בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- א. הוכח כי $nd = 66$.
- ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.
- ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

תשובות סופיות:

- (1) $a_{43} = -235$
- (2) $d = 4, a_1 = -5$
- (3) 20 איברים
- (4) 48 איברים
- (5) 15 דקות
- (6) 58 מספרים
- (7) 31 איברים חיוביים
- (8) $x = 4, x = 1$
- (9) $a_{19} = 59$
- (10) $S_{14} = 413$
- (11) 21 איברים
- (12) 16 דקות
- (13) 37 איברים
- (14) 3647
- (15) 23920
- (16) א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
- (17) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$
- (18) זוגיים: $S = 135$, אי-זוגיים: $S = 99$
- (19) שאלת הוכחה.
- (20) 29 איברים.
- (21) א. $a_1 = 50, d = -6$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$
- (22) א. i. $x = -50$ ii. $d = 11$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
- (23) א. $a_1 = 12, d = -3$ ב. $b_5 = -3$ ג.
- (24) א. $n = 81$ ב. $n = 16$ ג.
- (25) א. $a_1 = -8, d = 2$ ב. $n = 36$ ג.
- (26) א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$ ג.
- (27) א. 12 לפי ההצעה הראשונה ו-8 לפי ההצעה השנייה. ב. 45000 ₪.
- (28) א. $S = 22a_1 + 693$ ב. $a_9 = 1$ ג.

הסדרה ההנדסית:

סיכום כללי:

- **נוסחת האיבר הכללי:**
נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

- **כלל נסיגה של סדרה הנדסית:**
כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

- **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:**
סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

שאלות לפי נושאים:

שאלות העוסקות בנוסחת האיבר הכללי:

- (1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.
- (2) מצא כמה איברים יש בסדרה הנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$.
- (3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6 תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7 מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית: $x-6, x+4, 4x+1$. מצא גם את מנת הסדרה.

8 נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

שאלות העוסקות בסכום סדרה הנדסית:

9 מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \dots$.

10 תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11 סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12 בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13 סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14 נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$. בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

15 בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

16 נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

17 בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

שאלות מסכמות:

18 ענה על הסעיפים הבאים:

א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.

בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.

ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.

19 באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה:

תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה...

המלך הסכים להצעה.

א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?

ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.

ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה

נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים,

כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

(20) המספרים: $2x-3$, $x-9$, $x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.

- א. מצא את x .
 ב. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
 ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
 ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.
 מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.

(21) בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

- א. מצא את מנת הסדרה.
 ב. ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
 מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.

(22) נתונה הסדרה הבאה: a_n , 4 , 12 , 36 , \dots . מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n באופן הבא:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, \quad b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, \quad b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \quad \dots, \quad b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
 ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין

סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

תשובות סופיות:

(1) $a_9 = 729$

(2) $n = 7$

(3) $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$

(4) $a_1 = \frac{2}{3}, q = \pm 3$

(5) $a_1 = \frac{1}{25}, q = 5$

(6) 5 דקות.

(7) $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3$

(8) $a_8 = 384$

(9) $S_9 = 2555$

(10) 5 דקות.

(11) $n = 4$, יש 12 איברים בסדרה.

(12) $q = 2$

(13) $n = 6$

(14) אי-זוגיים: $S = 595$, זוגיים: $S = 1190$.

(15) $q = 4$

(16) $\frac{q+1}{q}$

(17) $a_1 = \frac{3}{8}$

(18) א. $\frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1}$ ב. $a_n = 3^{n-1}$ ג. a_5, a_6

(19) א. $a_{25} = 16,777,216$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

לו 20,000,000 אבנים. ג. $S_n = 22,369,620, 4,16,64, \dots, 2^{24}$

(20) א. $x = 14$ ב.i. $a_n = 5^{n-1}$ ב.ii. a_6, a_7 ג. $S_7^* = 61,034,375$

(21) א. $q = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$

(22) א. $q = 3$ ג. b_5, b_6

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

סיכום כללי:

- הגדרה: סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

- נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת: הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$. S = \frac{a_1}{1-q} \text{ : מתקבל הכלל הבא}$$

- סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

- כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה: $. S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

- כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה

$$. S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \text{ : באופן הבא}$$

שאלות שונות:

שאלות כלליות:

- (1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$
- (2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- (3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 62.5. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).
- (4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.
- (5) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$
- א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
 ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32.
 מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

שאלות מסכמות:

- (6) בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- א. מצא את מנת הסדרה.
 מחברים כל שני איברים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
 ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
 ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
 ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .

(7) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , $(0 < q < 1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10}, \dots$, $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$.
נתון כי: $T = 6V$.

- א. מצא את מנת הסדרה q .
- ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?
- ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא $1365\frac{1}{3}$.

(8) נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$.

- א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.
- בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
- ב. מצא את מנת הסדרה.
- ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו. ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

(9) נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , $(q \neq 0, |q| < 1)$.
נגדיר את הסכומים הבאים: $T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}, \dots$, $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$.
נתון כי: $V = 0.3T$.

- א. מצא את מנת הסדרה q .
- מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.
- ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.
- ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

. $S = 18$ (1)

. $a_1 = 24$ (2)

. $q = \frac{4}{5}$, $a_1 = 12\frac{1}{2}$ או $q = \frac{1}{5}$, $a_1 = 50$ (3)

. $S = 18\frac{2}{3}$ (4)

. $q = \frac{1}{3}$, $a_1 = 16$ ב. (5)

$a_1 = 200$ ד. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$ ב. $q = 0.6$ א. (6)

$a_5 = 20$ ג. $q = 0.5$ ב. $\frac{S_{n(s)}}{S_{n(o)}} = a_1$ א. (7)

$a_1 = 1024$ ג. ב. פי 5 $q = \frac{1}{2}$ א. (8)

$S = 288$ ג. ב. $a_1 = -16$ $q = \frac{1}{3}$ א. (9)

סדרות נסיגה:

סיכום כללי:

סדרה כללית מוגדרת באמצעות חוקיות בין שני איברים (לרוב סמוכים): a_n ו- a_{n+1} .
 דוגמאות: $a_{n+1} = 3a_n - 2$, $a_{n+1} - n \cdot a_n = 4$.
 כדי לתאר סדרת מספרים בודדת מקובל להגדיר את האיבר הראשון a_1 .

כלל נסיגה מוגדר ע"י חוקיות והאיבר הראשון, כגון: $\begin{cases} a_{n+1} = 4a_n \\ a_1 = 2 \end{cases}$ והוא מתאר סדרת מספרים אחת בלבד.

שאלות:

שאלות יסודיות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- מצא את האיבר השלישי בסדרה.
- נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12} .
- נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k . הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30} .
- מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 133.
- הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את ערכו של t שבעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

- (4) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 6n - 2$.
 מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.
 א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
 ב. חשב את b_1 .
- (5) סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = 3a_n + 4$.
 מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.
 א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
 ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1 .

שאלות מסכמות:

- (6) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.
 א. חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
 ב. הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.
 ג. כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
 ד. חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$.
- (7) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$.
 א. ענה על הסעיפים הבאים:
 i. הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .
 ii. מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.
 ב. הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$.
 חשב את הסכום הבא: $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$.
 ג. מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?
- (8) סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.
 א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
 ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

9 סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.

ב. כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.

ג. חשב את הסכום הבא: $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$.

10 סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$.

מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.

ב. חשב את האיבר b_5 .

ג. חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$.

11 סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$.

מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$.

א. הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$.

תשובות סופיות:

א. $a_3 = -22$ ב. $a_{12} = 5, a_{14} = 33$ ג. $a_{30} = k - 49, a_{32} = k + 51$ (1)

ד. a_{72}, a_{73} ה. ההפרש בין שני איברים סמוכים נתון

ע"י: $a_{n+1} - a_n = 2n - 11$. כאשר נשווה את הפרש זה ל-62 נקבל $n = 36.5$

אשר לא יתכן. מכאן כי לא קיימים אני איברים סמוכים שהפרשם 62.

א. $a_{k+2} = 74 + 4k$ (2)

ב. $t = -33$ (3)

א. $d = 6$ ב. $b_1 = 4$ (4)

א. $q = 3$ ב. $a_1 = 0$ (5)

א. $a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7$ ג. $S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n$ (6)

ד. $S_{9(o)} = 117$

א. $a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4$ ב. a_6 (7)

א. $S_{6-11} = 265458$ ג. $a_1 = 5$

א. $a_4 = 19 - k, a_3 = k + 8, a_2 = 11 - k, a_1 = k$ ב. 8 (8)

ג. 830

א. $q = 2.5$ ב. $b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^* = -4086.74$ (9)

א. $b_{n+1} = 3b_n$ ב. $b_5 = 648$ ג. $S = 1594320$ (10)

א. $d_{b_n} = 2 \frac{2}{3}$ ב. $S_{11(p)} = 267 \frac{2}{3}$ (11)