

תוכן העניינים:

פרק 5	3
חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים	3
הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:	3
סיכום כללי:	3
שאלות:	3
תשובות סופיות:	5
חוקי הלוגריתמים:	6
סיכום כללי:	6
שאלות:	6
תשובות סופיות:	9
חישובים עם חזקה לוגריתמית:	10
סיכום כללי:	10
שאלות:	10
תשובות סופיות:	10
מעבר בין בסיסים:	11
סיכום כללי:	11
שאלות:	11
תשובות סופיות:	12
הלוגריתם הטבעי:	13
סיכום כללי:	13
שאלות:	13
תשובות סופיות:	14
משוואות עם בסיסים שונים:	15
סיכום כללי:	15
שאלות:	15
תשובות סופיות:	15
מערכת משוואות לוגריתמיות:	16
שאלות:	16
תשובות סופיות:	16
מערכת משוואות לוגריתמיות-מעריכיות:	17
שאלות:	17
תשובות סופיות:	17
אי-שוויונים לוגריתמיים:	18
סיכום כללי:	18
שאלות:	18

18: תשובות סופיות

19: תרגול נוסף

19: הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות

23: תשובות סופיות

25: חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות

27: תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים

29: תשובות סופיות

31: מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות

32: תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים

33: הוצאת לוג משני אגפים

34: שאלות עם לוגריתם טבעי

36: תשובות סופיות

38: אי-שוויוניים לוגריתמיים

38: תשובות סופיות

פרק 5

חוקי הלוגריתמים, משוואות ואי-שוויונים לוגריתמיים

הגדרת הלוגריתם ומשוואות יסודיות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הלוגריתם מוגדר באופן הבא: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ כאשר: $a, b > 0, a \neq 1$.

הסבר:

לוגריתם על בסיס a של b מוגדר בתור החזקה שיש להעלות את a על מנת שיהיה שווה ל- b .
 ערך חזקה זו הוא x . ערך לוגריתם יכול להיות חיובי, שלילי או אפס. נחשב ערכי לוגריתמים ונפתור משוואות לוגריתמיות ע"י מעבר לפי ההגדרה למשוואה מעריכית מתאימה.

כללים יסודיים בלוגריתמים:

מהגדרת הלוגריתם נובע כי: $\log_a a = 1$ וכן: $\log_a 1 = 0$ לכל $a > 0, a \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הבאים:

א. $\log_2 32$ ב. $\log 1000$ ג. $\log_{25} 5$

ד. $\log_8 4$ ה. $\log_4 \frac{1}{16}$ ו. $\log_a a^4$

ז. $\log_a \frac{1}{a\sqrt{a}}$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (יסודי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_{36} 6 = x$ ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$ ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$ ו. $\log_x (3x+4) = 2$

(3) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (כללי - שימוש בהגדרת הלוג):

א. $\log_6 (4x-2) = 1$ ב. $\log_4 (4-x) = \frac{1}{2}$

ג. $\log_8 (x^4 - 73) = 1$ ד. $\log_3 \frac{x+3}{3-3x} = -2$

ה. $\log_x (2x^2 + x - 12) = 2$ ו. $\log_{\sqrt{x+1}} (2x^2 - 5) = 2$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג מספר פעמים):

א. $\log_4 (\log_3 x) = 1$ ב. $3\log_{27} (\log_2 (x+3)) = 1$

ג. $\log_{\frac{1}{16}} (\log_3 (5x^2 + 1)) = -\frac{1}{2}$ ד. $\log_6 (3 + \log_2 (6 + \log_4 (x^2 + 15))) = 1$

(5) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_2 (3^x + 37) = 6$ ב. $\log_3 (3 \cdot 2^x - 303) = 4$

ג. $\log_5 (126 \cdot 5^x - 25) = 2x + 1$ ד. $3\log_2 \left(3 \cdot 4^{1+\frac{1}{3}x} - 11 \cdot 2^{\frac{x}{3}} + 3 \right) = 12 + 2x$

(6) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הצבה):

א. $(\log_2 x)^4 = 10000$ ב. $2(\log_3 x)^2 + \log_3 x = 10$

ג. $\frac{3 \cdot \log_{14} x + 1}{(\log_{14} x)^2} = 4$ ד. $\sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x} + \sqrt{\log_{\frac{1}{81}} x + 2} = 2$

תשובות סופיות:

- (1) א. 5 ב. 3 ג. $\frac{1}{2}$ ד. $\frac{2}{3}$ ה. -2
 ג. 4 ד. -1.5
- (2) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$
 ה. $x = 5$ ג. $x = 4$
- (3) א. $x = 2$ ב. $x = 2$ ג. $x = \pm 3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 3$ ו. $x = 2$
- (4) א. $x = 81$ ב. $x = 5$ ג. $x = \pm 4$ ד. $x = \pm 1$
- (5) א. $x = 3$ ב. $x = 7$ ג. $x = -1, 2$ ד. $x = -6$
- (6) א. $x = 1024, \frac{1}{1024}$ ב. $x = 9, \frac{1}{9\sqrt{3}}$
 ג. $x = 14, \frac{1}{\sqrt[4]{14}}$ ד. $x = \frac{1}{3}$

חוקי הלוגריתמים:

סיכום כללי:

- להלן 3 חוקי הלוגריתמים עבור בסיס $a > 0 \neq 1$ וארגומנטים x ו- y חיוביים:
- מכפלה לסכום: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
 - מנה להפרש: $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$.
 - מקדם למעריך: $\log_a b^n = n \log_a b$ (כאשר $b > 0$ ו- n מספר ממשי כלשהו).

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|--|---|
| א. $\log_3 12 + \log_3 2.25$ | ב. $\log_{\frac{1}{5}} 40 + \log_{\frac{1}{5}} 12.5 + \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$ |
| ג. $\log_2 200 - \log_2 100$ | ד. $\log_3 60 - \log_3 540$ |
| ה. $\log_4 8 + \log_4 12 - \log_4 6$ | ו. $\log_7 1.5 - \log_7 147 + \log_7 2$ |
| ז. $3 \log_5 2 - \log_5 1.6$ | ח. $\log_{\sqrt{4}} 6.4 + 2 \log_{\sqrt{4}} \sqrt{10}$ |
| ט. $\frac{1}{2} \left(\log_7 \frac{7}{2} + \log_7 2 \right) + \log_7 14 - \frac{1}{3} \log_7 8$ | י. $\frac{1}{4} \log 81 - \log 1.5 - \frac{1}{2} \log 40$ |

(2) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (שימוש בחוקי הלוגים):

- | | |
|---|--|
| א. $\frac{\log_5 16}{\log_5 8}$ | ב. $\frac{\log_9 62.5 + \log_9 2}{\log_9 0.2}$ |
| ג. $\frac{\log_3 5 - \log_3 2 + \log_3 50}{\log_3 225 - 2}$ | ד. $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ |

משוואות לוגריתמיות:

(3) פתור את המשוואות הבאות (שימוש ישיר בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_2 x + \log_2 (x-6) = 4$ ב. $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$

ג. $\log_2 (x+30) - \log_2 x = 4$ ד. $\log_5 (x+146) - \log_5 (x+2) = 2$

ה. $2\log_3 (2x-1) - \log_3 (22x+9) = -1$

ו. $2\log_5 (x-2) = \log_5 (4x-15) + \log_5 x$

(4) פתור את המשוואות הבאות (פתרון בשיטת לוג שווה לוג):

א. $\log_5 (4x-3) = \log_5 7$

ב. $2\log_2 (2x-2) - \log_2 (16-x) = \log_2 (x-1) + 1$

(5) פתור את המשוואות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

א. $\log_3 (3 \cdot 5^x + 39) = 3 + \log_3 (5^x - 3)$

ב. $\log_2 (3 - 4^{x+1}) - \log_2 11 = x$

(6) פתור את המשוואות הבאות (שימוש הפוך בחוקי הלוגריתמים):

א. $\log_4 x \cdot \log_4 (16x) = 8$

ב. $\log_2 \left(\frac{x}{4}\right) \cdot \log_2 (1024x) = -11$

ג. $\log_2 x^2 \log_2 \left(\frac{x}{16}\right) = -\log_2 (64x)$

ד. $(\log_4 4x)^2 = \log_4 4x^2 + 1$

ה. $\log_3 (9x^2) \cdot \log_3 (9x^3) = \log_3 \left(\frac{81}{x}\right) + 2$

ו. $\frac{\log_2 \left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2 (2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9}$

תשובות סופיות:

- (1) א. 3 ב. -3 ג. 1 ד. -2 ה. 2
 ו. -2 ז. 1.5 ח. 6 ט. 1.5 י. -0.5
- (2) א. $\frac{4}{3}$ ב. -3 ג. 1.5 ד. 0.5
- (3) א. $x=8$ ב. $x=1$ ג. $x=2$ ד. $x=4$ ה. $x=3$ ו. $x=4$
- (4) א. $x=2.5$ ב. $x=6$
- (5) א. $x=1$ ב. $x=-2$
- (6) א. $x=16, \frac{1}{256}$ ב. $x=2, \frac{1}{512}$ ג. $x=4, 2\sqrt{2}$ ד. $x=4, \frac{1}{4}$
- ה. $x=\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}$ ו. $x=8, \sqrt[7]{2^{15}}$
- (7) א. $4a$ ב. $a+1$ ג. $3a+1$ ד. $1-a$
- (8) א. $2a+b$ ב. $2+a+b$ ג. $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}$
- (9) $4(2a-1), 3(1-a)$
- (10) הוכחה.
- (11) הוכחה.
- (12) הוכחה.
- (13) הוכחה.

חישובים עם חזקה לוגריתמית:

סיכום כללי:

מהגדרת הלוגריתם ניתן לנסח את הקשר הבא: $a^{\log_a x} = x$ כאשר $a > 0 \neq 1$.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

א. $6^{\log_6 8}$ ב. $4^{\log_2 5}$

(2) נתונה התבנית: $3 \cdot 4^x$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = \log_4 7$ ב. $x = \log_4 \sqrt{3}$

ג. $x = 2 \log_4 0.1$ ד. $x = \log_2 \sqrt{5}$

(3) נתונה התבנית: $\frac{1}{6} \cdot 9^x - 2 \cdot 3^x + 1$. חשב את ערכה עבור:

א. $x = -1$ ב. $x = \log_3 5$

ג. $x = \log_3 \sqrt{6}$

(4) חשב:

א. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\log_{\sqrt{56}} 81}$ ב. $\sqrt{4^{2 - \frac{1}{3} \log_2 27}}$

תשובות סופיות:

(1) א. 8 ב. 25

(2) א. 21 ב. $3\sqrt{3}$ ג. 0.03 ד. 15

(3) א. $\frac{19}{54}$ ב. $-4\frac{5}{6}$ ג. $2 - 2\sqrt{6}$

(4) א. $\frac{1}{81}$ ב. $\frac{4}{3}$

מעבר בין בסיסים:

סיכום כללי:

מעבר מבסיס a לבסיס m (כאשר: $a > 0 \neq 1$ ו- $m > 0 \neq 1$, וכן: $b > 0$)

$$\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$$

יתבצע באופן הבא:

שאלות:

שאלות חישוב כלליות:

1) חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_4 7 \cdot \log_7 4$	ב. $\log_{0.1} 3 \cdot \log_9 1000$
ג. $\log_{\sqrt{3}} 5 \cdot \log_{\sqrt{125}} 9$	ד. $\log_4 169 \cdot \log_{25} 64 \cdot \log_{13} 625$

2) הוכח את השוויונות הבאים:

א. $\log_2 25 \cdot \log_5 3 \cdot \log_9 2 = 1$
ב. $\log_{16} 9 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 5 = 1$

משוואות לוגריתמיות:

3) פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_2 x + \log_{32} x = 6$	ב. $\log_3 x \cdot \log_{27} x = 3$
ג. $\log_2 4x \cdot \log_8 \frac{x}{16} = -\frac{5}{3}$	ד. $\log_x 5 - 6 \log_{125} x = 1$

שאלות הבעה:

4) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$	ב. $\log_{32} 36$	ג. $\log_{216} 96$
---------------	-------------------	--------------------

5) נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 50$	ב. $\log_2 \sqrt{30}$	ג. $\log_5 22.5$
----------------	-----------------------	------------------

6 נתון $\log_3 7 = a$, $\log 9 = 2b$. הבע באמצעות a ו- b את:

א. $\log 21$.

ב. $\log_3 \left(\frac{10}{7} \right)$.

ג. $\log_7 10$.

ד. $\log_{30} 63$.

שאלות נוספות:

בכל אחת מהמשוואות הבאות, חשב את ערך הביטוי שמשמאל וקבל את התוצאה מימין:

7 $\log_6 9 \cdot \log_{15} 30 + \log_6 5 \cdot \log_{15} 4 = 2$

8 $\log \sqrt{3} \cdot \log_6 50 + \log \sqrt{2} \cdot \log_6 300 = 1$

תשובות סופיות:

1 א. 1 ב. -1.5 ג. $2\frac{2}{3}$ ד. 12

2 א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

3 א. $x = 32$ ב. $x = 27, \frac{1}{27}$ ג. $x = 8, \frac{1}{2}$ ד. $x = \frac{1}{5}, \sqrt{5}$

4 א. $2a - 1$ ב. $0.8a$ ג. $\frac{a+2}{3a}$

5 א. $2b + \frac{1}{a}$ ב. $\frac{a}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1}{2}$ ג. $\frac{2}{b} + 1 - \frac{1}{ab}$

6 א. $b + ab$ ב. $\frac{1}{b} - a$ ג. $\frac{1}{ab}$ ד. $\frac{ab+2b}{b+1}$

7 הוכחה.

8 הוכחה.

הלוגריתם הטבעי:

סיכום כללי:

לוגריתם על בסיס e (קבוע אוילר) מסומן: $\log_e \Rightarrow \ln$ והוא נקרא הלוגריתם הטבעי.
 למשל: $\ln 3 = \log_e 3$ או $\ln \frac{1}{4} = \log_e \frac{1}{4}$. לוג זה נקרא בשם לן.
 מהגדרת הלוגריתם מתקיים: $\ln a = b \rightarrow e^b = a$ כאשר $a > 0$ ו- b מספרים כלשהם.

שאלות:

(1) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הלוגריתמיים הטבעיים הבאים:

$$\ln e^2 \quad \text{א.} \quad \ln \frac{1}{e^4} \quad \text{ב.} \quad \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} \quad \text{ג.}$$

(2) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוג):

$$\ln x = 2 \quad \text{א.} \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \text{ב.}$$

(3) פתור את המשוואות הבאות (הצבה וחוקי הלוגריתמים):

$$\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x \quad \text{א.}$$

$$3 \ln^2 x + \ln x = 2 \quad \text{ב.}$$

$$\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2) \quad \text{ג.}$$

(4) פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (הוצאת לוג משני אגפי המשוואה)

$$x^{\ln x} = e^6 x \quad \text{א.} \quad \left(\frac{1}{x} \right)^{2-3 \ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x} \quad \text{ב.}$$

(5) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים (חזקה לוגריתמית):

$$e^{\ln 3} \quad \text{א.} \quad e^{2 \ln 3} \quad \text{ב.}$$

תשובות סופיות:

(1) א. 2 ב. -4 ג. -1.5

(2) א. $x = e^2$ ב. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(3) א. $x = 0$ ב. $x = \sqrt[3]{e^2}, \frac{1}{e}$ ג. $x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, \frac{1}{e}$

(4) א. $x = e^3, \frac{1}{e^2}$ ב. $x = \sqrt{e}, e$

(5) א. 3 ב. 9

משוואות עם בסיסים שונים:

סיכום כללי:

לעיתים תתקבל משוואה מעריכית שבה לא ניתן למצוא חזקה שלמה, כגון: $3^x = 4$. במקרים אלו נעזר בהגדרת הלוג כדי לבטא את ערך המעריך: $x = \log_3 4$. את ערך הביטוי $\log_3 4$ ניתן לחשב ע"י מחשבון או ע"י מעבר לבסיס 10: $\log_3 4 = \frac{\log 4}{\log 3}$.

שאלות:

(1) פתור את המשוואות הבאות (בסיסים שונים):

א. $3^x = 6$ ב. $2^x - 9 = 0$
 ג. $49^x - 8 \cdot 7^x + 15 = 0$ ד. $2 \cdot 3^{\frac{2x}{3}} + 5 \cdot 3^{\frac{x}{3}} + 2 = 0$

(2) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם בסיס ולוגריתם טבעי):

א. $e^{3x} = 3$ ב. $4 + 3e^x = 9$
 ג. $3e^{2x} - 4e^x + 1 = 0$ ד. $e(e^x + 1) = 2\sqrt{e^{x+2}} + 9e$

(3) פתור את המשוואות הבאות (משוואות כלליות עם פתרונות לא שלמים):

א. $\log_2(7 - 5^x) = \log_2 \frac{10}{5^x}$
 ב. $\log_2(4e^{2x} + 6) - 1 = \log_2(7e^x)$

תשובות סופיות:

(1) א. $x = \log_3 6 = 1.63$ ב. $x = \log_2 9 = 3.17$
 ג. $x = \log_7 3 = 0.564$, $x = \log_7 5 = 0.827$ ד. אין פתרון.
 (2) א. $x = \frac{1}{3} \ln 3 = 0.36$ ב. $x = \ln \frac{5}{3} = 0.51$ ג. $x = \ln \frac{1}{3} = -1.09$, $x = 0$
 ד. $x = \ln 16 = 2.772$
 (3) א. $x = 1$, $x = \log_5 2 = 0.43$ ב. $x = \ln \frac{1}{2} = -0.693$, $x = \ln 3 = 1.098$

מערכת משוואות לוגריתמיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6(2y - 2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y - 1 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \log_3(x + y) = \log_3(4x + y) - 2 \\ \log_5(5x + 3y) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \log_2(\log_3(x - y)) = 1 \\ \log_5(x + y - 11) = \log_{25} x + \frac{1}{2}\log_5(y + 2) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 6\log_4 y = 11 \\ 10\log_5 x - 2\log_4 y = 17 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1(2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases} \quad (9)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{llll} (8, -5) \quad (3) & (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \quad (2) & (8, 3) \quad (1) \\ \left(16, \frac{1}{3}\right) \quad (6) & (25, 8) \quad (5) & (16, 7) \quad (4) \\ (4, 7) \quad (9) & (3, 9), (9, 3) \quad (8) & (25, 4), (625, 2) \quad (7) \end{array}$$

מערכת משוואות לוגריתמיות-מעריכיות:

שאלות:

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} 3y + 5 \log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad (6) \qquad \begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad (5)$$

תשובות סופיות:

$$\begin{array}{lll} (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) & (3) & (3, 3) \quad (2) \qquad (1, 1) \quad (1) \\ & (1, 0) \quad (6) & (1, 1), (2, 3) \quad (5) \qquad \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \quad (4) \end{array}$$

אי-שוויונים לוגריתמיים:

סיכום כללי:

פתרון אי-השוויון: $\log_a x > \log_a y$ הוא: $x > y$ עבור: $a > 1$ ו- $x < y$ עבור: $0 < a < 1$.

שאלות:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\log_2 x < \log_2 (5x - 20) \quad (1)$$

$$\log_3 x > \log_9 (15 - 2x) \quad (3)$$

$$\ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad (5)$$

$$\ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad (7)$$

$$\log_6 (x^2 - 5x) < 1 \quad (2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x) \quad (4)$$

$$\ln x < 3 \quad (6)$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad (8)$$

תשובות סופיות:

$$x > 5 \quad (1)$$

$$3 < x < 7\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (5)$$

$$\frac{1}{e} < x < e^7 \quad (7)$$

$$-1 < x < 0, 5 < x < 6 \quad (2)$$

$$-3 \leq x < \frac{1}{3} \quad (4)$$

$$0 < x < e^3 \quad (6)$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (8)$$

תרגול נוסף:

הגדרת הלוגריתם ומשוואות לוגריתמיות יסודיות:

חשב את ערכי הלוגריתמים הבאים:

תזכורת: הגדרת הלוגריתם: $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ (כאשר: $b > 0, a > 0 \neq 1$).

- | | | |
|--|--|---|
| $\log_5 5$ (3) | $\log_3 81$ (2) | $\log_2 8$ (1) |
| $\log_{125} 5$ (6) | $\log_{32} 8$ (5) | $\log_9 243$ (4) |
| $\log_{\frac{1}{2}} 16$ (9) | $\log_{32} 64$ (8) | $\log_{49} 7$ (7) |
| $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{8}$ (12) | $\log_{\frac{1}{25}} 625$ (11) | $\log_{\frac{1}{3}} 27$ (10) |
| $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{5}}} \frac{1}{9}$ (15) | $\log_{\frac{5}{3}} \frac{27}{125}$ (14) | $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ (13) |
| $\log_{\frac{1}{27}} \sqrt[4]{3}$ (18) | $\log_{\sqrt[3]{7}} \frac{1}{343}$ (17) | $\log_{\sqrt[3]{5}} 125$ (16) |
| $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{25}}} \sqrt[5]{125}$ (21) | $\log_{\frac{1}{\sqrt{27}}} \sqrt[3]{81}$ (20) | $\log_{\frac{1}{8}} \sqrt[5]{128}$ (19) |
| $\log_{0.01} \frac{10}{\sqrt[4]{1000}}$ (24) | $\log \frac{\sqrt[5]{100}}{\sqrt{10}}$ (23) | $\log \frac{\sqrt{10}}{100}$ (22) |

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות:

- | | | |
|---|---------------------------------|----------------------------------|
| $\log_6 x = 1$ (27) | $\log_2 x = 5$ (26) | $\log_3 x = 2$ (25) |
| $\log_7 x = 0$ (30) | $\log_4 x = -2$ (29) | $\log_3 x = -3$ (28) |
| $\log_{\frac{1}{8}} x = \frac{1}{3}$ (33) | $\log_{\frac{3}{5}} x = 4$ (32) | $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ (31) |
| $\log_{\sqrt{5}} x + 2 = 0$ (36) | $7 \log_{128} x - 3 = 0$ (35) | $4 \log_9 x - 2 = 0$ (34) |

מצא את x במשוואות הלוגריתמיות הבאות :

$$\log_x 25 = 2 \quad \text{(39)}$$

$$\log_x 6 = -1 \quad \text{(38)}$$

$$\log_x 3 = 1 \quad \text{(37)}$$

$$\log_x 64 = 3 \quad \text{(42)}$$

$$\log_x 625 = 4 \quad \text{(41)}$$

$$\log_x 64 = 2 \quad \text{(40)}$$

$$\log_x \frac{1}{81} = 4 \quad \text{(45)}$$

$$\log_x \frac{4}{9} = -2 \quad \text{(44)}$$

$$\log_x \frac{1}{8} = 3 \quad \text{(43)}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם):

$$\log_5 (6 - 7x) = 3 \quad \text{(48)}$$

$$\log_2 (x + 5) = 4 \quad \text{(47)}$$

$$\log_5 (x + 1) = 1 \quad \text{(46)}$$

$$\log_{64} (x + 3) = \frac{1}{3} \quad \text{(51)}$$

$$\log_4 (4x + 1) = \frac{1}{2} \quad \text{(50)}$$

$$\log_6 (3x - 2) = 0 \quad \text{(49)}$$

$$\log_{0.2} (2x + 1) = -2 \quad \text{(54)}$$

$$\log_{\sqrt{3}} (7x + 2) = 2 \quad \text{(53)}$$

$$\log_{\sqrt{5}} (3x + 1) = 4 \quad \text{(52)}$$

$$\log_3 \left(x^2 - \frac{2x}{9} \right) = -3 \quad \text{(57)}$$

$$\log_6 (13x - x^2) = 2 \quad \text{(56)}$$

$$\log_4 (10x - x^2) = 2 \quad \text{(55)}$$

$$\log_3 (x - 2x^2 + 28) = 3 \quad \text{(60)}$$

$$\log_2 (x^2 - 6x + 13) = 3 \quad \text{(59)}$$

$$\log_2 (x^2 - 6x + 10) = 1 \quad \text{(58)}$$

$$\log_7 (x^4 - 80) = 0 \quad \text{(63)}$$

$$\log_3 (x^3 - 44) = 4 \quad \text{(62)}$$

$$\log_4 (x^3 - 11) = 2 \quad \text{(61)}$$

$$\log_2 \frac{x^2 - 5}{x} = 2 \quad \text{(66)}$$

$$\log_3 \frac{20x + 68}{5x + 2} = 2 \quad \text{(65)}$$

$$\log_4 \frac{3x - 1}{x + 2} = 1 \quad \text{(64)}$$

$$\log_x (2x^2 - 6x + 5) = 2 \quad \text{(69)}$$

$$\log_x (3x^2 - 5x + 3) = 2 \quad \text{(68)}$$

$$\log_x (2x^2 - 9x) = 2 \quad \text{(67)}$$

$$\log_{x+2} (4x + 5) = 2 \quad \text{(72)}$$

$$\log_x (2x^2 + x - 6) = 2 \quad \text{(71)}$$

$$\log_x (4x^2 - 3x) = 2 \quad \text{(70)}$$

$$\log_{\sqrt{x+1}} (x^2 - x - 2) = 2 \quad \text{(75)}$$

$$\log_{\sqrt{x}} \left(\frac{8}{x} \right) = 4 \quad \text{(74)}$$

$$\log_{x-3} (3x - 11) = 2 \quad \text{(73)}$$

$$\log_{\sqrt{x^2+3}} (4 + 3x + 3x^2) = 2 \quad \text{(78)}$$

$$\log_{\sqrt{x+3}} (x + 5) = 4 \quad \text{(77)}$$

$$\log_4 (10x - x^2) = 2 \quad \text{(76)}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם מספר פעמים):

$$2\log_9(\log_5(2x-1))=1 \quad \textbf{(80)}$$

$$\log_3(\log_2 x)=1 \quad \textbf{(79)}$$

$$\log_{\frac{1}{16}}(\log_3(x^2-7.5x))=-\frac{1}{2} \quad \textbf{(82)}$$

$$\log_2(\log_3(x+3)+30)=5 \quad \textbf{(81)}$$

$$\log_{25}(2-5^{x+2})=x+2 \quad \textbf{(84)}$$

$$\log_2\left(\log_{0.25}\left(x^2+\frac{1}{4}\right)\right)=-1 \quad \textbf{(83)}$$

$$\log_5\left(4+\log_6\left(3+\log_4(x^2+15)\right)\right)=1 \quad \textbf{(86)}$$

$$\log_5\left(\log_3\left(\log_3(5x^2+7)\right)\right)=0 \quad \textbf{(85)}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות (מתקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_3(5 \cdot 2^x + 1) = 4 \quad \textbf{(88)}$$

$$\log_2(5^x + 3) = 7 \quad \textbf{(87)}$$

$$\log_5(5^x + 120) - x = 2 \quad \textbf{(90)}$$

$$\log_2(12 - 2^x) = x + 1 \quad \textbf{(89)}$$

$$\log_9(10 \cdot 3^x - 9) = x \quad \textbf{(92)}$$

$$\log_4(5 \cdot 2^{x+1} - 16) = x \quad \textbf{(91)}$$

$$\log_4(17 - 4^x) + x = 2 \quad \textbf{(94)}$$

$$\log_5(30 - 5^x) + x = 3 \quad \textbf{(93)}$$

$$\log_2(5 \cdot 2^{x+1} - 1) = 2x + 4 \quad \textbf{(96)}$$

$$\log_5(49 \cdot 5^x - 120) = 2x + 1 \quad \textbf{(95)}$$

$$3\log_2\left(9 \cdot 2^{\frac{x}{3}+1} - 1\right) = 15 + 2x \quad \textbf{(98)}$$

$$\log_8(3 - 23 \cdot 8^{3x}) = 6x + 1 \quad \textbf{(97)}$$

פתור את המשוואות הלוגריתמיות הבאות:

הדרכה: היעזר בהצבה של: $\log_a x = t$, פתור משוואה עבור t והחזר את ההצבה למציאת x עפ"י הגדרת הלוגריתם.

$$(\log_2 x)^2 + 2 \cdot \log_2 x - 15 = 0 \quad \textbf{(100)}$$

$$(\log_3 x)^2 = 16 \quad \textbf{(99)}$$

$$\log_7 x - \frac{6}{\log_7 x} = 1 \quad \textbf{(102)}$$

$$2 \cdot (\log_4 x)^2 - 5 \cdot \log_4 x = 3 \quad \textbf{(101)}$$

$$\frac{5 \cdot \log_{64} x - 1}{(\log_{64} x)^2} = 6 \quad \textbf{(104)}$$

$$\frac{12}{\log_3 x + 1} - \frac{2}{\log_3 x} = 3 \quad \textbf{(103)}$$

$$\sqrt{\log_{16} x} + \sqrt{\log_{16} x + 2} = 2 \quad \textbf{(106)}$$

$$\log_3 x + \sqrt{\log_3 x} = 2 \quad \textbf{(105)}$$

$$(\log_3 x)^2 - \sqrt{(\log_3 x)^2 + 27} = 3 \quad \textbf{(107)}$$

תשובות סופיות:

2.5 (4	1 (3	4 (2	3 (1
$\frac{6}{5}$ (8	$\frac{1}{2}$ (7	$\frac{1}{3}$ (6	0.6 (5
1.5 (12	-2 (11	-3 (10	-4 (9
9 (16	6 (15	-3 (14	-2 (13
$-\frac{8}{9}$ (20	$-\frac{7}{15}$ (19	$-\frac{1}{12}$ (18	-9 (17
$-\frac{1}{8}$ (24	-0.1 (23	-1.5 (22	-0.9 (21
$\frac{1}{27}$ (28	6 (27	32 (26	9 (25
$\frac{81}{625}$ (32	9 (31	1 (30	$\frac{1}{16}$ (29
0.2 (36	8 (35	3 (34	0.5 (33
8 (40	5 (39	$\frac{1}{6}$ (38	3 (37
1.5 (44	0.5 (43	4 (42	5 (41
-17 (48	11 (47	4 (46	$\frac{1}{3}$ (45
8 (52	1 (51	0.25 (50	1 (49
9, 4 (56	8, 2 (55	12 (54	$\frac{1}{7}$ (53
$1, -\frac{1}{2}$ (60	1, 5 (59	4, 2 (58	$\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}$ (57
-9 (64	± 3 (63	5 (62	3 (61
1.5 (68	9 (67	5, -1 (66	2 (65
1 (72	2 (71	\emptyset (70	5 (69
2, 8 (76	3 (75	2 (74	5 (73
63 (80	8 (79	$-1, -\frac{1}{2}$ (78	-1 (77

-2 (84	$\pm\frac{1}{2}$ (83	13.5 , -6 (82	6 (81
4 (88	3 (87	± 7 (86	± 2 (85
0 , 2 (92	3 , 1 (91	1 (90	2 (89
-3 , -1 (96	0.974 , 1 (95	0 , 2 (94	2 , 1 (93
$8, \frac{1}{32}$ (100	$81, \frac{1}{81}$ (99	-12 , -3 (98	$-\frac{1}{3}$ (97
8 , 4 (104	$\sqrt[3]{3}, 9$ (103	$343, \frac{1}{49}$ (102	$64, \frac{1}{2}$ (101
	$27, \frac{1}{27}$ (107	2 (106	3 (105

חוקי הלוגריתמים ומשוואות לוגריתמיות:

תזכורת – חוקי הלוגריתמים:

$$\log_x (x)^n = n \cdot \log_a x \quad \log_x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y} \quad \log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$$

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

- | | |
|---|--|
| $\log_8 4 + \log_8 16$ (2) | $\log_3 6 + \log_3 1.5$ (1) |
| $\log_5 150 - \log_5 6$ (4) | $\log_2 10 + \log_2 6.4$ (3) |
| $\log_2 768 - \log_2 6$ (6) | $\log_4 192 - \log_4 3$ (5) |
| $\log_{0.2} 2 - \log_{0.2} 10$ (8) | $\log_{81} 120 - \log_{81} 40$ (7) |
| $2 \log_6 2 + \log_6 9$ (10) | $\log_{0.25} 80 - \log_{0.25} 5$ (9) |
| $3 \log_3 6 + \log_3 3.375$ (12) | $\log_4 1.6 + 2 \log_4 \sqrt{10}$ (11) |
| $\log_4 24 + \log_4 5 - \log_4 10 - \log_4 3$ (14) | $\log_3 18 + \log_3 6 - \log_3 4$ (13) |
| $\log_6 10 - \log_6 5 - \log_6 288 + \log_6 4$ (16) | $\log_5 50 + \log_5 20 - \log_5 2 - \log_5 4$ (15) |
| $\frac{1}{2} \left(\log_5 \frac{5}{2} + \log_5 2 \right) + \log_5 10 - \frac{1}{3} \log_5 8$ (18) | $\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}} 25 + 2 \log_{\sqrt{3}} 2 - \log_{\sqrt{3}} 60$ (17) |
| $-\frac{1}{4} \log_{\sqrt{7}} 81 + 2 \log_{\sqrt{7}} 6 - \log_{\sqrt{7}} 84$ (20) | $\frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 6 - \frac{1}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 3 + \frac{3}{2} \log_{\sqrt[3]{2}} 4$ (19) |

חשב את ערכי הביטויים הבאים:

טיפ: הפוך את המספרים השלמים לביטוי לוגריתמי לפי: $k = \log_a a^k$

וחבר אותם לביטויים הנוספים לפי חוקי הלוגריתמים.

- | | | |
|---|--|--|
| $\frac{\log_7 4 + \log_7 8}{\log_7 2}$ (23) | $\frac{\log_4 125}{\log_4 5}$ (22) | $\frac{\log_3 16}{\log_3 8}$ (21) |
| $\frac{\log_7 5 + \log_7 3 - 4}{\log_7 225 - \log_2 256}$ (26) | $\frac{\log_2 5 - \log_2 2 + 1}{\log_2 200 - 3}$ (25) | $\frac{\log_3 6 + 2}{\log_3 108 - \log_3 2}$ (24) |
| $\frac{2 - 2 \log_3 4 + \log_3 8 \frac{8}{9}}{4 - \log_3 0.01 - 2 \log_3 18}$ (29) | $\frac{\log_4 18 - \log_4 2 + \log_4 36}{2 \log_4 6 - 3 \log_4 8 + 4}$ (28) | $\frac{2 - 3 \log 5 + \log 50}{1 + \log 128 - 5 \log 2}$ (27) |

חשב את ערכי הביטויים הבאים (הלוגריתם לפי בסיס 10):

$$\frac{\log 8}{\log \sqrt{8}} \quad (32) \qquad \frac{\log 8}{\log 16} \quad (31) \qquad \frac{\log 27}{\log 9} \quad (30)$$

$$\frac{\log 36 + 0.5 \log 6}{\log 12 - \log 2} \quad (35) \qquad \frac{\log 72 - \log 8}{\log \sqrt{27}} \quad (34) \qquad \frac{\log 24 - \log 3}{\log 2} \quad (33)$$

$$\frac{1 + \log 5}{\log 2 + 2 \log 5} \quad (36)$$

(37) הוכח את נכונות השוויוניים הבאים (לפי בסיס 10):

$$\frac{\log 125 - 1 + \log 2}{\log 5 + 1 - \log 2} = 1 \quad \text{א.}$$

$$\frac{2 - \log 25 + 2 \log 8}{\log \sqrt[3]{16}} = 6 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{\log 9 + 2 \log 5 + \log 4}{\log 10 - \log 2 + \log 6} = 2 \quad \text{ג.}$$

פתור את המשוואות הבאות (איחוד ביטויים באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\log_{15} x + \log_{15} (x - 2) = 1 \quad (39) \qquad \log_4 x + \log_4 (x - 6) = 2 \quad (38)$$

$$\log_{35} (x - 8) + \log_{35} (x - 6) = 1 \quad (41) \qquad \log_2 x + \log_2 (x - 3) = 2 \quad (40)$$

$$\log_3 (x + 105) - \log_3 (x + 1) = 3 \quad (43) \qquad \log_2 (x + 14) - \log_2 x = 3 \quad (42)$$

$$\log_2 (2x + 8) = 2 + \log_2 (5 - x) \quad (45) \qquad \log_2 (3x + 4) - \log_2 (x - 2) = 1 \quad (44)$$

$$\log_2 (11x + 4) - \log_2 (2x + 1) = \log_2 (2x + 3) \quad (47) \qquad \log_3 (x^2 + 11) = 1 + \log_3 (2x + 1) \quad (46)$$

$$\log_5 (30x + 9) - \log_5 (4x + 5) = \log_5 (3x + 2) \quad (48)$$

$$2 \log_5 (x + 1) = \log_5 (2x + 3.5) + \log_5 x \quad (49)$$

$$\log_2 (x - 4) + \log_2 (x + 2) - \log_2 (x - 3) = 3 \quad (50)$$

$$\frac{\log_7 (12x - 35)}{2 \log_7 x} = 1 \quad (51)$$

פתור את המשוואות הבאות (שימוש בהגדרת הלוגריתם וקבלת משוואה מעריכית):

$$\log_2(5^x + 19) = 3 + \log_2(8 - 5^x) \quad (53) \qquad \log_3(2^x + 2) - \log_3(2^x - 14) = 2 \quad (52)$$

$$\log_3(25^x + 8) - 2 = x \log_3 5 \quad (55) \qquad 1 + (x + 2) \log_3 2 = \log_3(4^x + 32) \quad (54)$$

$$x \log_2 4 = \log_2(2^x + 28) + x - 3 \quad (57) \qquad \log_3(9^{x+3} - 1) = x + 5 + \log_3(3^{x+3} - 1) \quad (56)$$

פתור את המשוואות הבאות (פתיחה באמצעות חוקי הלוגריתמים):

$$\log_4(16x) \cdot \log_4(64x) = 12 \quad (59) \qquad \log_3 x \cdot \log_3(3x) = 6 \quad (58)$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 \frac{x}{8} = -2 \quad (61) \qquad \log_2(32x) \cdot \log_2(128x) = 48 \quad (60)$$

$$\log_4 x^2 \cdot \log_4 \frac{16}{x} = \log_4(4x) \quad (63) \qquad \log_3\left(\frac{27}{x}\right) \cdot \log_3(81x) = 10 \quad (62)$$

$$(\log_3 3x)^2 = \log_3 3x^2 + 1 \quad (65) \qquad \log_2 x^2 \cdot \log_2(8x) = \log_2\left(\frac{16}{x}\right) \quad (64)$$

$$\log_3(27x^3) \cdot \log_3(3x^2) = \log_3\left(\frac{81}{x}\right) + 3 \quad (67) \qquad (\log_5 25x)^2 = \log_5 25x^2 + 1 \quad (66)$$

$$2 \log_5 x \cdot \log_5\left(\frac{125}{x^2}\right) = 2 \quad (69) \qquad \log_2\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \log_2(32x^2) = \log_2\left(\frac{x}{128}\right) + 2 \quad (68)$$

$$\frac{\log_2\left(\frac{x^3}{32}\right)}{(\log_2 x)^2} + \frac{\log_2(2x)}{\log_2 x} = 1\frac{7}{9} \quad (71) \qquad \frac{\log_7\left(\frac{343}{x^2}\right)}{(\log_7 x)^2} + \frac{1}{4} = 0 \quad (70)$$

תרגילי הבעה – חוקי הלוגריתמים:

(72) נתון: $\log_2 7 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:
א. $\log_2 14$ ב. $\log_2 49$

(73) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:
א. $\log_3 125$ ב. $\log_3 0.2$

(74) נתון: $\log_{24} 6 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:
א. $\log_{24} 2$ ב. $\log_{24} 3$

(75) נתון: $\log 4 = a$. הבע באמצעות a את הביטויים הבאים:

א. $\log 16$ ב. $\log 2$ ג. $\log 8$

(76) נתון: $\log_3 6 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 30$ ב. $\log_3 1.2$ ג. $\log_3 150$

(77) נתון: $\log_4 3 = a$, $\log_4 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_4 0.12$ ב. $\log_4 2.4$

(78) נתון: $\log_7 8 = a$, $\log_7 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_7 40$ ב. $\log_7 320$

(79) נתון: $\log_5 3 = a$, $\log_5 2 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_5 \sqrt{6}$ ב. $\log_5 \sqrt[3]{72}$

(80) נתון: $\log_8 10 = a$, $\log_8 3 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_8 \sqrt{0.03}$ ב. $\log_8 \sqrt[5]{\frac{10}{27}}$

(81) נתון: $\log_3 7 = a$, $\log_3 8 = b$. הבע באמצעות a ו- b את הביטויים הבאים:

א. $\log_3 \frac{64}{343}$ ב. $\log_3 \sqrt[4]{\frac{49}{512}}$

חשב את ערכי הביטויים הבאים באמצעות הנוסחה: $a^{\log_a b} = b$:

(82) $2^{\log_2 3}$ **(83)** $5^{\log_5 12}$ **(84)** $0.24^{\log_{0.24} 6}$ **(85)** $10^{\log 2}$

(86) $2^{2\log_2 3}$ **(87)** $3^{3\log_3 4}$ **(88)** $9^{\log_3 4}$ **(89)** $27^{\log_3 2}$

(90) $8^{\log_2 3}$ **(91)** $32^{\log_2 3}$ **(92)** $125^{-\log_5 3}$ **(93)** $\sqrt{6}^{\log_{36} 4}$

(94) $\sqrt{3}^{\log_3 16}$ **(95)** $\sqrt[5]{8}^{\log_2 243}$ **(96)** $\sqrt[3]{5}^{\log_5 64}$ **(97)** $3^{\log_9 2}$

(98) $64^{\log_2 5}$ **(99)** $5^{\log_{125} 8}$ **(100)** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\sqrt{5}} 4}$ **(101)** $\left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{\sqrt{49}} 81}$

(102) $5^{1+\log_5 2}$ **(103)** $3^{2-\log_3 6}$ **(104)** $\frac{4^{\log_4 9}}{4^2}$ **(105)** $\sqrt{27}^{1+\log_3 2}$

(106) $\sqrt[3]{2^{3-\log_{\sqrt{8}} 5}}$

תשובות סופיות:

3 (5	2 (4	6 (3	2 (2	2 (1
2 (10	-2 (9	1 (8	0.25 (7	7 (6
3 (15	1 (14	3 (13	6 (12	2 (11
-2 (20	10.5 (19	1.5 (18	-2 (17	-2 (16
0.5 (25	1 (24	5 (23	3 (22	$\frac{4}{3}$ (21
1.5 (30	0.5 (29	2 (28	1 (27	0.5 (26
2.5 (35	$\frac{4}{3}$ (34	3 (33	2 (32	0.75 (31
4 (40	5 (39	8 (38	הוכחה (37	1 (36
2 (45	\emptyset (44	3 (43	2 (42	13 (41
8 (50	0.5 (49	$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ (48	$1, -\frac{1}{4}$ (47	4, 2 (46
1.292, 0 (55	3, 2 (54	1 (53	4 (52	5, 7 (51
$2, \frac{1}{2^{13}}$ (60	$4, \frac{1}{4^6}$ (59	$9, \frac{1}{27}$ (58	2 (57	\emptyset (56
$3, \frac{1}{3}$ (65	$\sqrt{2}, \frac{1}{16}$ (64	2 (63	$\frac{1}{9}, 3$ (62	2, 4 (61
$49, 7^6$ (70	$\sqrt{5}$ (69	1, 0.2973 (68	$\frac{1}{9}, \sqrt[3]{3}$ (67	0.2 (66
				$3, 2\frac{1}{7}$ (71
		ב. $2a$		א. $a+1$ (72
		ב. $-a$		א. $3a$ (73
		ב. $\frac{3a-1}{2}$		א. $\frac{1-a}{2}$ (74
	א. $1.5a$	ב. $0.5a$		א. $2a$ (75
	א. $a+2b$	ב. $a-b$		א. $a+b$ (76

		$a+1-b$.ב	$a-2b$.א (77)
		$2a+b$.ב	$a+b$.א (78)
		$b+\frac{2}{3}a$.ב	$\frac{b+a}{2}$.א (79)
		$\frac{a-3b}{5}$.ב	$\frac{b-2a}{2}$.א (80)
		$\frac{2a-3b}{4}$.ב	$2b-3a$.א (81)
9 (86)	2 (85)	6 (84)	12 (83)
243 (91)	27 (90)	8 (89)	16 (88)
4 (96)	27 (95)	4 (94)	$\sqrt[4]{4}$ (93)
$\frac{1}{81}$ (101)	0.25 (100)	2 (99)	5^6 (98)
$\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$ (106)	$\sqrt{216}$ (105)	3 (104)	1.5 (103)
			10 (102)

מעבר מבסיס לבסיס ומשוואות לוגריתמיות:

חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

תזכורת: $a, m > 0 \neq 1, \log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$

- | | |
|--|---|
| $\log_2 5 \cdot \log_{25} 4$ (2) | $\log_3 6 \cdot \log_6 3$ (1) |
| $\log_{0.1} 5 \cdot \log_{25} 100$ (4) | $\log_{27} 4 \cdot \log_2 3$ (3) |
| $\log_5 8 \cdot \log_7 25 \cdot \log_2 49$ (6) | $\log_{\sqrt{3}} 7 \cdot \log_{\sqrt{343}} 9$ (5) |
| $\log_{81} 49 \cdot \log_{32} 3 \cdot \log_7 2$ (8) | $\log_4 169 \cdot \log_9 64 \cdot \log_{13} 243$ (7) |

הוכח את השוויוניים שלפניך:

- | | |
|---|--|
| $\log_6 \frac{1}{8} \cdot \log_2 6 = -3$ (10) | $\log_7 25 \cdot \log_5 7 = 2$ (9) |
| $\log_3 8 \cdot \log_5 3 \cdot \log_2 5 = 3$ (12) | $\log_4 25 \cdot \log_5 4 = 2$ (11) |
| $\log_{16} 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_3 25 = 1$ (14) | $\log_7 2 \log_5 7 \log_{16} 5 = 0.25$ (13) |
| $\log_a b \cdot \log_c a + \log_b a \cdot \log_c b = \log_c ab$ (16) | $\log_2 25 \cdot \log_5 9 \cdot \log_{81} 2 = 1$ (15) |

פתור את המשוואות הבאות:

- | | |
|---|--|
| $\log_{81} x + \log_3 x = 5$ (18) | $\log_2 x + \log_8 x = 4$ (17) |
| $\log_3 x + 3 \log_{27} x^2 = 3$ (20) | $5 \log_5 x - \log_{\frac{1}{25}} x = 11$ (19) |
| $\log_5 x \cdot \log_{125} x = 3$ (22) | $\log_2 x^3 + 4 \log_{16} x = 8$ (21) |
| $\log_3 (81x) \cdot \log_{27} \left(\frac{x}{9}\right) = \frac{7}{3}$ (24) | $\log_2 (8x) \cdot \log_{16} x = 7$ (23) |
| $\log_x 2 + \log_2 x = 2$ (26) | $\log_2 (32x^2) \cdot \log_8 \left(\frac{4}{x^3}\right) = -12$ (25) |
| $4 \log_x 5 = 3 + 2 \log_{25} x$ (28) | $\log_x 3 - 6 \log_{27} x = 1$ (27) |
| $\log_6 (16x - 3) \cdot \log_{x\sqrt{5}} 6 = 2$ (30) | $\log_3 (6 - x) \cdot \log_x 3 = 2$ (29) |
| $\log_2 (4x) + \log_{8x} 4 = 3.5$ (32) | $\log_5 x = 4.5 + \log_{5x} 125$ (31) |

$$\log_x (27x) \cdot \log_{81x} \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{4}{5} = 0 \quad (34)$$

$$3 \cdot \log_{\sqrt{x}} (6x) - \log_{36} x = 4 \quad (36)$$

$$\log_x 4 + 3 \log_{4x} 16 = 4 \quad (33)$$

$$2 \log_{4x} 8 \cdot \log_{\frac{x}{2}} (16x) = 9 \quad (35)$$

$$\log_x 5 \cdot \log_{5x} (5x^2) = 2 \cdot \log_{25x} 5 \quad (37)$$

תרגילי הבעה – נוסחת המעבר בין בסיסים:

(38) נתון: $\log_2 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_5 2$

ב. $\log_4 5$

ג. $\log_{16} 5$

(39) נתון: $\log_4 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_2 3$

ב. $\log_{32} 36$

ג. $\log_{216} 96$

(40) נתון: $\log_3 5 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_3 15$

ב. $\log_{15} 3$

ג. $\log_9 25$

(41) נתון: $\log 2 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log 80$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{80} 2000$

(42) נתון: $\log_5 6 = a$. הבע באמצעות a את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{36} 30$

ב. $\log_{216} 180$

ג. $\log_{\frac{1}{6}} \sqrt{125}$

(43) נתון: $\log 2 = 0.3$. חשב את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\log_{\sqrt{2}} 100$

ב. $\log_8 40$

ג. $\log_{\frac{1}{4}} 5$

(44) ענה על הסעיפים הבאים:

א. הוכח כי לכל $a, b > 0 \neq 1$ מתקיימת הטענה הבאה: $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$.

ב. נתון: $\log_a 5 = b$. הוכח כי מתקיים: $\log_a b = \frac{b}{\log_b 5}$.

ג. נתון: $2 \cdot \log_3 a \cdot \log_{(b+c)} 3 = 1$.

הוכח כי לכל: $a, b, c > 0 \neq 1$ מתקיים: $a^2 = b + c$.

הוצאת לוג משני אגפים:

פתור את המשוואות הבאות (הוצאת לוג משני אגפים):

$x^{1+\log_3 x} = 729$ **(47)**

$x^{\log_3 x} = 3$ **(46)**

$x^{\log_2 x} = 16$ **(45)**

$x^{9-3\log_2 x} = \frac{x}{8}$ **(50)**

$x^{2\log_3 x+8} = x$ **(49)**

$x^{3\log_5 x+2} = 5$ **(48)**

שאלות עם לוגריתם טבעי:

51) חשב ללא מחשבון את ערכי הביטויים הבאים:

א. $\ln \sqrt{e}$	ב. $\ln \sqrt[3]{e^2}$
ג. $\ln \sqrt[4]{e \cdot e^2}$	ד. $\ln \sqrt[5]{\frac{1}{e^3}}$
ה. $\ln^2 e$	ו. $\ln e^2$
ז. $\ln 16 + \ln 3 - \ln 12 - \ln 4$	ח. $2 \ln e + 3 \ln \sqrt{e} - \ln e^3$
ט. $\frac{3 \ln x + 4 \ln \frac{1}{x^2} - \ln \sqrt[4]{x}}{\ln x^3 + 2 \ln \sqrt{x}}$	י. $\frac{3 \ln x - 4 \ln \sqrt{\frac{1}{x}} - \ln \sqrt[4]{x}}{\ln x^3 + 2 \ln \frac{1}{\sqrt{x}}}$
יא. $e^{\ln 3}$	יב. $e^{2 \ln 3}$
יג. $\sqrt[3]{e^{6 \ln 5}}$	יד. $\frac{e^{\ln 7} - \ln^3 e^2 + 3 \ln \sqrt{e}}{\ln 5e^2 + \ln 0.2}$
טו. $\frac{\ln \frac{4}{e^3} + e^{3 \ln 2} - 2 \ln 2}{\ln^3 \sqrt[4]{e}}$	

52) פתור את המשוואות הבאות (משוואות עם לוגריתם טבעי (ln)):

א. $\ln x + 7 = 0$	ב. $5 + 2 \ln x = 14$
ג. $\ln(x+1) = 3$	ד. $\ln(5-x) = 2$
ה. $\ln(1-3x) = 4$	ו. $3 \ln(2x-3) = 18$
ז. $\ln(x^2 - 2x - 2) = 0$	ח. $\ln(x^2 + 5x + 5) = 0$
ט. $\ln(e^x - 1) = 0$	י. $\ln(2e^x - 3) = x$
יא. $3 \ln^5 x = 20.4$	יב. $2 \ln^4 x + 3 = 165$
יג. $\ln(x-3) + \ln(x+4) = -\ln 10$	יד. $\ln(6-x) + \ln(x+2) = \ln 15$

$$\frac{\ln(2x^2 - 6x - 7)}{\ln(3-x)} = 2. \text{טז}$$

$$\ln(x+2) - \ln(x-1) = 2. \text{טו}$$

$$\ln(e^{2x} + 5) - \ln(e^x + 1) = \ln 3. \text{יח}$$

$$\frac{\ln(4x+3)}{\ln(x^2)} = \frac{1}{2}. \text{יז}$$

$$\frac{2\ln^2 x - 5\ln x}{2} + 1 = 0. \text{כז}$$

$$\ln(1-e^x) - \ln(6+e^x) = 6. \text{יט}$$

$$x \ln x = 2x. \text{כב}$$

$$x \ln x = 3 \ln x. \text{כא}$$

$$2\ln^2 x + 2 = 2.5 \ln x^2. \text{כד}$$

$$5\ln^2 x - 3 = \ln x^2. \text{כג}$$

53 פתור את המשוואות הבאות (משוואות מעריכיות עם פתרון המבוטא ע"י (\ln)):

$$3e^x + 7 = 5. \text{ב.}$$

$$e^x = 17. \text{א.}$$

$$e^{2x-3} = 5. \text{ד.}$$

$$3e^x + 7 = 5e^x. \text{ג.}$$

$$e^{2x} + 7e^x = 30. \text{ו.}$$

$$3e^{x+8} + 2 = e^{\ln 6}. \text{ה.}$$

$$2e^x - 9 = 3(\sqrt{e})^x. \text{ז.}$$

תשובות סופיות:

-1 (4	$\frac{2}{3}$ (3	1 (2	1 (1
0.1 (8	15 (7	12 (6	$2\frac{2}{3}$ (5
3 (20	25 (19	81 (18	8 (17
$27, \frac{1}{243}$ (24	$16, \frac{1}{128}$ (19	$125, \frac{1}{125}$ (22	4 (21
$5, \frac{1}{625}$ (20	$\sqrt{3}, \frac{1}{3}$ (22	2 (26	0.07, 4 (25
$\frac{1}{4\sqrt{2}}, 2$ (22	$\frac{1}{5\sqrt{5}}, 5^5$ (27	0.2, 3 (30	2 (29
$6^6, \frac{1}{36}$ (23	$4, \frac{1}{\sqrt[3]{128}}$ (21	3 (34	4 (33
$\frac{a}{4}$.ג	$\frac{a}{2}$.ב	$\frac{1}{a}$.א (38	$\frac{1}{\sqrt[3]{25}}$ (37
	$\frac{a+2}{3a}$.ג	0.8a .ב	2a-1 .א (39
	.a .ג	$\frac{1}{a+1}$.ב	a+1 .א (40
	$\frac{a+3}{3a+1}$.ג	$\frac{2a+1}{3a}$.ב	3a+1 .א (41
	$-\frac{1.5}{a}$.ג	$\frac{2a+1}{3a}$.ב	$\frac{a+1}{2a}$.א (42
	$-1\frac{1}{6}$.ג	$1\frac{7}{9}$.ב	$13\frac{1}{3}$.א (43
$\frac{1}{5}, \sqrt[3]{5}$ (48	$9, \frac{1}{27}$ (47	$3, \frac{1}{3}$ (46	0.25, 4 (45
		$8, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\frac{1}{81}, \sqrt{3}$ (49
1 .ה	-0.3 .ד	$\frac{3}{4}$.ג	$\frac{2}{3}$.ב
$2\frac{3}{8}$.ו	$-1\frac{5}{16}$.ט	0.5 .ח	0 .ז
.320 .יט	$\frac{1}{4}$.יד	25 .יג	9 .יב
			3 .יא

- (52)** א. $e^{-7} \approx 0.00091 \approx 0.001$ ב. $e^{4.5} \approx 90.017$ ג. $e^3 - 1$ ד. $5 - e^2$
- ה. -17.87 ו. $\frac{e^6 + 3}{2} \approx 203.214$ ז. $-1, 3$ ח. $-4, -1$
- ט. $\ln 2$ י. $\ln 3$ יא. 4.337 יב. $e^3 \approx 20.086, e^{-3} \approx 0.05$
- יג. 3.014 יד. $3, 1$ יו. -4 יז. -0.6 יח. $0, \ln 2$
- יט. ϕ כ. $e^2 \approx 7.389, \sqrt{e} \approx 1.649$ כא. $1, 3$
- כב. e^2 כג. $e, 0.548$ כד. $e^2, 1.649$
- (53)** א. $\ln 17 \approx 2.83$ ב. אין פתרונות. ג. $\ln 3.5 \approx 1.25$
- ד. $\frac{\ln 5 + 3}{2} \approx 2.3$ ה. $\ln\left(\frac{4}{3}\right) - 8 \approx -7.712$
- ו. $\ln 3 \approx 1.099$ ז. $2 \ln 3 \approx 2.198$

אי-שוויוניים לוגריתמיים:

פתור את אי-השוויוניים הבאים:

$\log_5(x-2) \leq 1 \quad (2)$ $\log(x+4) \geq \log(10-2x) \quad (4)$ $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3) > \log_{\frac{1}{3}}(x+5) \quad (6)$ $\log_2(x^2-3x)-2 > 0 \quad (8)$ $\log_4\left(\frac{x+3}{x-2}\right) > \frac{1}{2} \quad (10)$ $\log_4^2 x - 3\log_4 x + 2 > 0 \quad (12)$	$\log_4(x-3) < 0 \quad (1)$ $\log_{0.5}(3-x) < -2 \quad (3)$ $\log_2(x+2) < \log_2(2x-3) \quad (5)$ $\log_{0.5}\left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) > 1 \quad (7)$ $\log_2\left(x^2 - \frac{9}{16}\right) < 0 \quad (9)$ $\log_2\left(\frac{x-5}{x+2}\right) \geq 1 \quad (11)$
--	--

(13) פתור את אי-השוויונים הבאים (שימוש בלוגריתם הטבעי (\ln)):

<p>א. $\ln x > \ln 3$</p> <p>ב. $\ln(x+1) > \ln(2-x)$</p> <p>ג. $2\ln x > 3$</p> <p>ד. $\ln(x^2+4) > \ln(2x+3)$</p> <p>ה. $\ln(4x-x^2) \leq \ln(6x+3)$</p> <p>ו. $\ln^2 x - 8\ln x + 7 > 0$</p> <p>ז. $2 - 3\ln x + \ln^2 x \leq 0$</p>	<p>ח. $6\ln x - (\ln x)^2 \leq 0$</p> <p>ט. $\ln(9x+1) \geq \ln(1+x^3)$</p> <p>י. $\ln(4x-x^2) \leq \ln(6x+3)$</p> <p>יא. $\ln^2 x - 8\ln x + 7 > 0$</p> <p>יב. $2 - 3\ln x + \ln^2 x \leq 0$</p>
---	---

תשובות סופיות:

$x < -1 \quad (3)$ $-1 < x < 2 \quad (6)$ $-\frac{5}{4} < x < -\frac{3}{4}, \frac{3}{4} < x < \frac{5}{4} \quad (9)$ $0 < x < 4, x > 16 \quad (12)$	$2 < x \leq 7 \quad (2)$ $x > 5 \quad (5)$ $x < -1, x > 4 \quad (8)$ $-9 \leq x < -2 \quad (11)$	$3 < x < 4 \quad (1)$ $2 \leq x < 5 \quad (4)$ $-\frac{1}{2} < x < 0, \frac{1}{2} < x < 1 \quad (7)$ $2 < x < 7 \quad (10)$
<p>א. $x > 3$</p> <p>ב. $0.5 < x < 2$</p> <p>ג. $x > e^{1.5}$</p> <p>ד. $x > -1.5, x \neq 1$</p> <p>ה. $0 < x < 4$</p> <p>ו. $0 \leq x \leq 3$</p> <p>ז. $0 < x < e, x > e^7$</p> <p>ח. $0 < x \leq 1, x \geq e^6$</p> <p>ט. $e \leq x \leq e^2$</p>	<p>א. $x > 3$</p> <p>ב. $0.5 < x < 2$</p> <p>ג. $x > e^{1.5}$</p> <p>ד. $x > -1.5, x \neq 1$</p> <p>ה. $0 < x < 4$</p> <p>ו. $0 \leq x \leq 3$</p> <p>ז. $0 < x < e, x > e^7$</p> <p>ח. $0 < x \leq 1, x \geq e^6$</p> <p>ט. $e \leq x \leq e^2$</p>	<p>א. $x > 3$</p> <p>ב. $0.5 < x < 2$</p> <p>ג. $x > e^{1.5}$</p> <p>ד. $x > -1.5, x \neq 1$</p> <p>ה. $0 < x < 4$</p> <p>ו. $0 \leq x \leq 3$</p> <p>ז. $0 < x < e, x > e^7$</p> <p>ח. $0 < x \leq 1, x \geq e^6$</p> <p>ט. $e \leq x \leq e^2$</p>